VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

VERONIKA CHRASTINOVÁ

MATEMATIKA

MODUL 3

VEKTOROVÁ ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIE

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

© Veronika Chrastinová 2004

Obsah

0 Úvod

0.1 Cíle

Tento učební text pojednává o analytické geometrii roviny a přímky v trojrozměrném euklidovském prostoru R^3, kterou popisuje s užitím metod vektorové algebry a je určen studentům kombinovaného a distančního studia Fakulty stavební VUT v Brně. Jeho cílem je prohloubení znalostí středoškolské analytické geometrie v rovině i v trojrozměrném prostoru, potřebné při studiu deskriptivní geometrie i dalších technických disciplín. V každé z kapitol textu je několik příkladů vyřešených, v závěru kapitoly je vždy uvedeno pár příkladů neřešených k procvičení s výsledky, někdy i s nápovědou, jakým způsobem příklad počítat.

0.2 Požadované znalosti

Text předpokládá znalost základních pojmů a výsledků týkajících se řešení systémů lineárních rovnic (Frobeniova věta), počítání s determinanty a některých vlastností vektorů včetně skalárního součinu vektorů. Ve speciálním případě trojrozměrného prostoru však lze také definovat vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ dvou vektorů (což je opět vektor), smíšený součin $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ tří vektorů (smíšeným součinem bude reálné číslo, „skalár“) a tzv.dvojný vektorový součin $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (opět vektor v prostoru R^3). Právě tyto pojmy jsou v prvních dvou kapitolách studovány a pak použity při řešení různých geometrických úloh. Skripta nejsou příliš rozsáhlá a zabývají se pouze geometrií útvarů lineárních (přímka, rovina).

Připomeňme nyní alespoň stručně některé vlastnosti vektorů, které známe z předchozího učebního textu [4]. Množina $\mathbf{M}$ se nazývá lineárním (vektorovým) prostorem, jestliže je definován součet $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{M}$ dvou prvků (vektorů) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}$ a také násobek $k.\vec{x} \in \mathbf{M}$ prvku $\vec{x}$ číslem k. (Můžeme přitom předpokládat $k \in R$, obecněji také komplexní číslo $k \in C$; podle toho hovoříme o vektorovém prostoru nad množinou R případně C.) Platí přitom známá pravidla pro počítání s vektory. Říkáme, že vektory $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n \in \mathbf{M}$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{M}$, jestliže každý vektor $\vec{a} \in \mathbf{M}$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru $\vec{a} = a_1.\vec{v}_1 + a_2.\vec{v}_2 + \cdots + a_n.\vec{v}_n$, kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou čísla, tzv.souřadnice vektoru $\vec{a}$ v bázi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Píšeme $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, přirozené číslo $n \in R$ nazýváme dimenzí prostoru $\mathbf{M}$. V našem případě je množinou $\mathbf{M}$ obyčejný trojrozměrný euklidovský prostor R^3, tedy $n = 3$, bází budeme v celém textu rozumět tzv.kanonickou ortonormální bázi vektorů souřadných os $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Vektory budeme vždy důsledně značit šipkami: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$. V samotném textu někdy připomeneme pojmy, které bychom už měli znát z předchozího studia (např.pojmy kladné resp. záporné orientace báze), zde na závěr připomeňme alespoň základní vlastnosti skalárního součinu dvou vektorů o souřadnicích $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Jejich skalární součin definujeme jako reálné číslo $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$, přitom platí $\vec{a} \bullet \vec{b} = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\cos\varphi$, kde $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $||\vec{b}|| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ jsou velikosti (neboli normy) vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ a φ je úhel těmito vektory sevřený. Když tedy pro nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, pak vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou kolmé (ortogonální). Ve vzorci skalárního součinu $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ a také v celém textu přitom výrazná tečka „$\bullet$“ vždy značí součin skalární (dvou vektorů), obyčejná tečka „ .“ je pouhým násobením reálným číslem.

0.3 Doba potřebná ke studiu

Pro studium vektorových prostorů, vektorové algebry a analytické geometrie jsou novém učebním plánu řádného studia vyhrazeny celkem 4 hodiny přednášek a 4 hodiny cvičení. Je to vzhledem k rozsahu problematiky i k jejímu propojení s dalším studiem poměrně málo a vyžaduje to kvalitní předběžné (středoškolské) znalosti problematiky a rozvinutou schopnost logického uvažování. Kombinované studium je více individuální, přesto však lze brát uvedené časové údaje aspoň jako výchozí.

0.4 Klíčová slova

Klíčová slova: operace s vektory, analytická geometrie lineárních útvarů.

Na závěr alespoň stručně o doporučené studijní literatuře, která spolu s rejstříkem nejdůležitějších pojmů celý text uzavírá. Skripta [1], [2] a [3] byla vydána přímo naší fakultou; [1] je pěknou sbírkou neřešených příkladů (uvedených vždy s výsledky), [4] je text bezprostředně předcházející tomuto studijnímu textu. Osvědčené učebnice [5], [6] a [7] jsou často velice podrobné a proto je můžeme doporučit studentům zejména k samostatnému studiu. Z krásných, stále znovu vydávaných učebnic s mnoha příklady a obrázky, které zejména v Irsku, Velké Británii a v Americe zachránily spoustu studentů před špatnou známkou z matematiky, jsem do seznamu literatury zapsala alespoň učebnice [8], [9] a [10]. Druhou z nich už máme v brněnské Moravské zemské knihovně, třetí určitě brzy objednáme. Poslední dvě učebnice [11] a [12] jsou volně přístupné v elektronické podobě, ale vyžadují někdy hlubší předběžné znalosti.

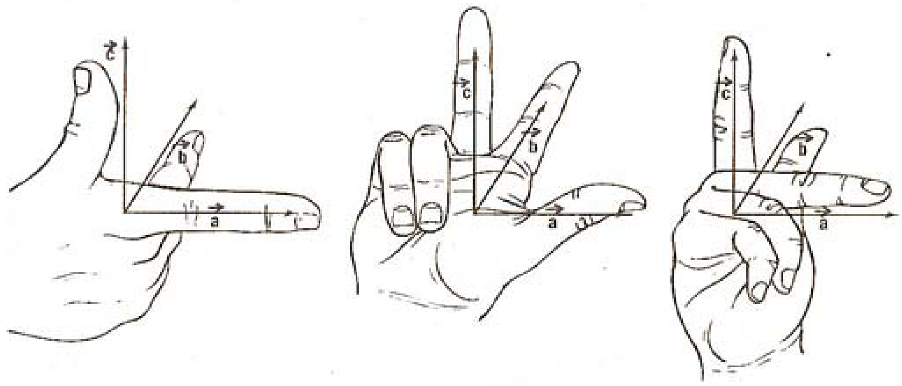
Děkuji panu doc.Jiřímu Valovi za rady a podstatnou pomoc při přípravě tohoto textu a přeju všem, kteří budou vektorovou algebru a analytickou geometrii studovat, pěkné příklady a úspěch u zkoušky.

Dr.Veronika Chrastinová 20.června 2004.

1 Vektorový a dvojný vektorový součin vektorů a jejich vlastnosti

Zatímco skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ dvou vektorů z prostoru R^3 je reálné číslo (neboli „skalár"), vektorovým součinem vektorů $\vec{a}, \vec{b} \in R$ bude opět vektor; tento vektor označíme symbolem $\vec{a} \times \vec{b}$. Jak navíc dále uvidíme, vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ budeme na rozdíl od součinu skalárního počítat pouze pro vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v prostoru R^3. Zobecnění vektorového součinu pro prostory vyšších dimenzí je sice možné, ale my se jím zde nebudeme zabývat.

Jak vypadá vektor $\vec{a} \times \vec{b}$? Mohli bychom si napsat přímo definiční vzorec pro jeho souřadnice pro zadané vektory $\vec{a}, \vec{b}$ v prostoru R^3, ale z tohoto vzorce bychom nic zajímavého nepoznali. Začněme raději geometrickým významem $\vec{a} \times \vec{b}$; definujme jeho směr a velikost.

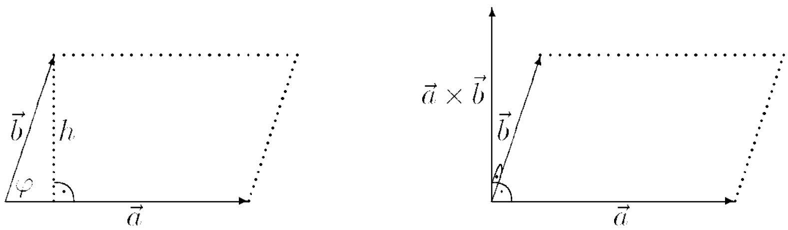


Směr vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$. Pokud vektory $\vec{a}, \vec{b}$ nejsou kolineární (neleží v jedné přímce), pak určují rovinu. Definujme nyní vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ jako vektor, který je k této rovině kolmý – musíme však kromě jeho velikosti definovat také jeho orientaci, protože vektor normály roviny může mít dvojí orientaci $\vec{n}$ a také $-\vec{n}$. Nechť vektorovým součinem $\vec{a} \times \vec{b}$ je tedy vektor normály takový, že uspořádaná trojice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je tzv. pozitivně orientovaná. Jak již víme z předchozího učebního textu z kapitoly o orientovaných bázích, pozitivní (neboli kladnou) orientaci vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ můžeme snadno popsat pomocí tzv. „pravidla pravé ruky" takto: ukazuje-li ukazováček pravé ruky ve směru vektoru $\vec{a}$ a prostředníček ve směru vektoru $\vec{b}$, pak palec ukazuje směr vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$. Pravidlo pravé ruky můžeme také popsat tak, že ukazují-li naše zahnuté prsty pravé ruky ve směru od vektoru $\vec{a}$ (prvního vektoru v dané trojici) k vektoru $\vec{b}$ (druhému vektoru v dané trojici), pak opět palec ukazuje směr vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$. Poznamenejme, že pořadí vektorů v trojici $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je důležité – při změně v pořadí např. prvních dvou vektorů na $\vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}$ bychom z trojice vektorů pozitivních dostali trojici vektorů negativních.

K tomu se ještě později podrobněji vrátíme.

Velikost (neboli v R^3 norma) vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$. Opět předpokládejme, že vektory $\vec{a}, \vec{b}$ nejsou rovnoběžné. Pak tyto vektory určují rovnoběžník se stranami $\vec{a}, \vec{b}$ a obsahem P, tento obsah lze snadno vypočítat. Označme φ úhel mezi vektory $\vec{a}, \vec{b}$, pak $\sin\varphi = h/||\vec{b}||$, kde h je výškou rovnoběžníka, odtud $h = ||\vec{b}||.\sin\varphi$. Plocha P rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\vec{a}, \vec{b}$ je rovna součinu velikostí jeho základny a výšky, tedy

$$P = ||\vec{a}||.h = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\sin\varphi\,.$$



Definujme nyní velikost $||\vec{a} \times \vec{b}||$ jako obsah P rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\vec{a}, \vec{b}$, tedy $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\sin\varphi$.
V případě rovnoběžných vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ (tedy $\vec{a} = k.\vec{b}$, kde $k \in R$) má rovnoběžník nulový obsah – vektory ležící v přímce vlastně žádný rovnoběžník neurčují. V tom případě vychází $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$, neboť $\sin\varphi = \sin 0 = 0$. Nulový vektor $\vec{o}$ dostaneme také tehdy, je-li některý z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ nulový (nebo i pro $\vec{a} = \vec{b} = \vec{o}$).

Nyní můžeme vše shrnout do následující definice.

Definice 1.1: Nechť $\vec{a}, \vec{b}$ jsou dané vektory, pak jejich **vektorový součin** definujeme jako vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, pro který platí:

1) $\vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý k rovině určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$ (a je tedy kolmý také ke každému z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$),

2) uspořádaná trojice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ je pozitivně orientovaná,

3) $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\sin\varphi$, kde φ je úhel sevřený vektory $\vec{a}, \vec{b}$.

Je-li některý z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ roven nulovému vektoru, definujeme $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

Užitím vektorového součinu můžeme snadno najít vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ kolmý k oběma vektorům $\vec{a}, \vec{b}$ (tedy vektor normály roviny, která je jimi určena), dále obsah rovnoběžníka $P = ||\vec{a} \times \vec{b}||$ sestrojeného nad vektory $\vec{a}, \vec{b}$, odtud také snadno obsah trojúhelníka se stranami $\vec{a}, \vec{b}$. Obsah tohoto trojúhelníka je totiž rovna polovině obsahu rovnoběžníka $P/2 = ||\vec{a} \times \vec{b}||/2$, neboť každá z úhlopříček dělí rovnoběžník na dva stejné trojúhelníky. V kapitole 5 budeme používat vektorový součin také k výpočtu vzdáleností v prostoru R^3; např. vzdálenosti dvou mimoběžných přímek.

Vysvětlili jsme si geometrický význam vektorového součinu, ale ještě jsme se ho nenaučili počítat: neznáme prozatím jeho souřadnicové vyjádření. Uveďme nyní vzorce pro počítání souřadnic vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$:

Věta 1.1: Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ v kartézské souřadné soustavě vektorů $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Pak platí

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} .\vec{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} .\vec{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .\vec{e_3} \,.$$

Podle uvedené věty lze tedy vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ psát ve tvaru jednoduchého determinantu, kde však v prvním řádku nejsou jen čísla (jak jsme zvyklí z lineární algebry), ale vektory souřadnicových os $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{e_2} = (0, 1, 0)$, $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$, ve druhém a třetím řádku pak souřadnice vektorů $\vec{a}, \vec{b}$. Rozvojem tohoto determinantu podle prvního řádku totiž dostaneme okamžitě vzorec uvedený ve větě:

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} .\vec{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} .\vec{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .\vec{e_3} = \vec{a} \times \vec{b} \,.$$

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ tedy můžeme psát přímo v souřadnicovém tvaru

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Nyní si větu 1.1 dokážeme – ověříme, že vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ uvedený v této větě splňuje všechny tři podmínky z definice vektorového součinu. V důkazu poslední z těchto podmínek budeme potřebovat tzv. **Lagrangeovu identitu**, prověřme si tedy její platnost v následující poznámce.

Poznámka. Nechť $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ jsou nenulové vektory, pak platí

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2 . ||\vec{b}||^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \,.$$

Je-li podle věty 1.1 vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$(a_2.b_3 - a_3.b_2,\ a_3.b_1 - a_1.b_3,\ a_1.b_2 - a_2.b_1) \,,$$

můžeme vypočítat levou, resp. pravou stranu Lagrangeovy identity takto:

$$||\vec{a} \times \vec{b}||^2 = (a_2.b_3 - a_3.b_2)^2 + (a_3.b_1 - a_1.b_3)^2 + (a_1.b_2 - a_2.b_1)^2 \,,$$

$$||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2 - (\vec{a}\bullet\vec{b})^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2).(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3)^2 .$$

Roznásobíme-li podrobně oba výrazy na pravé straně těchto dvou rovnic, ihned uvidíme, že jsou stejné. Tím je Lagrangeova identita dokázána a máme vše připraveno k důkazu věty 1.1.

Důkaz: Dokážeme postupně všechny tři podmínky uvedené v definici vektorového součinu.
První podmínku kolmosti vektoru $\vec{a}\times\vec{b}$ k oběma vektorům $\vec{a},\vec{b}$ prověříme přímým výpočtem. Víme, že pro navzájem kolmé vektory musí vyjít jejich skalární součiny $(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{b}$ nulové. Počítejme

$$(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \bullet (a_1, a_2, a_3) =$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.a_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

zcela analogicky bychom ověřili $(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{b}$. V tomto případě by ve výsledném determinantu v prvním a ve třetím řádku byl tentýž vektor (b_1, b_2, b_3) a takový determinant je nutně nulový.
Abychom dokázali druhou podmínku pozitivnosti trojice vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$, označme nejdříve složky vektoru $\vec{a}\times\vec{b} = (w_1, w_2, w_3)$, tedy

$$(w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) .$$

Jestliže je trojice $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ pozitivně orientovaná, musí podle definice v předcházejících učebních textech platit $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0$. Ale to je snadné ukázat, neboť rozvojem podle posledního řádku dostaneme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.w_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.w_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.w_3 =$$

$$w_1.w_1 + w_2.w_2 + w_3.w_3 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = ||\vec{w}||^2 > 0 .$$

Zbývá dokázat platnost poslední podmínky $||\vec{a}\times\vec{b}|| = ||\vec{a}||.||\vec{b}||.\sin\varphi$, k tomu budeme potřebovat právě výše uvedenou Lagrangeovu identitu. Podle této identity a známého vzorce $\cos\varphi = (\vec{a}\bullet\vec{b})/(||\vec{a}||.||\vec{b}||)$ pro počítání skalárního součinu $\vec{a}\bullet\vec{b}$ dvou vektorů svírajících úhel φ platí:

$$||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2 - (\vec{a}\bullet\vec{b})^2 = ||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2.\cos^2\varphi =$$

$$||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2.(1-\cos^2\varphi) = ||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2.\sin^2\varphi\,.$$

Odmocníme-li výsledný vztah $||\vec{a}\times\vec{b}||^2 = ||\vec{a}||^2.||\vec{b}||^2.\sin^2\varphi$, dostaneme ihned třetí definiční podmínku, neboť $|\sin\varphi| = \sin\varphi$ pro $0 \le \varphi \le \pi$.

Větu 1.1 bychom mohli také dokázat přímým výpočtem vektoru

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1.\vec{e}_1 + a_2.\vec{e}_2 + a_3.\vec{e}_3)\times(b_1.\vec{e}_1 + b_2.\vec{e}_2 + b_3.\vec{e}_3)\,,$$

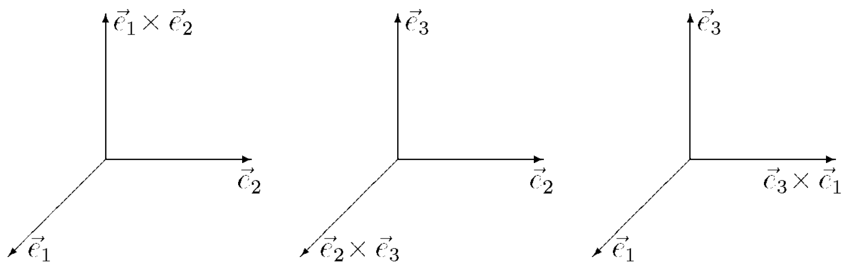
k tomu bychom však potřebovali znalost tzv. smíšeného součinu vektorů a důkaz by určitě nebyl kratší ani přehlednější.

V následujícím odstavci si podrobněji všimneme vlastností vektorového součinu. Nejdříve pro speciálně zvolené vektory $\vec{a},\vec{b}$ – vypočítáme si vektorové součiny pro případ vektorů souřadnicových os $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Z definice vektorového součinu a také z jeho souřadnicového vyjádření snadno vidíme, že platí

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2\times\vec{e}_1 = -\vec{e}_3,\ \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3\times\vec{e}_2 = -\vec{e}_1\,,$$

$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \vec{e}_1\times\vec{e}_3 = -\vec{e}_2,\ \vec{e}_1\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_3 = \vec{o}\,.$$

Např. chceme-li „uhodnout“ z obrázku, jak vypadá vektor $\vec{e}_1\times\vec{e}_2$, stačí si uvědomit, že vektor $\vec{e}_3$ je skutečně kolmý k oběma vektorům $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, orientace $\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = +\vec{e}_3$ plyne ihned z pravidla pravé ruky. Změníme-li pořadí vektorů $\vec{e}_2\times\vec{e}_1$, vychází užitím pravidla pravé ruky vektor opačný $\vec{e}_2\times\vec{e}_1 = -\vec{e}_3$:



Užitím souřadnicového vyjádření bychom mohli také počítat, např.

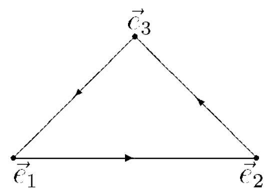
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = (0,0,1)\times(1,0,0) = \left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right) = (0,1,0) = \vec{e}_2\,,$$

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_2 = (0,1,0)\times(0,1,0) = \left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right) = (0,0,0) = \vec{o}\,.$$

Z výše uvedených vztahů pro počítání vektorového součinu vektorů $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ihned vidíme, že na rozdíl od skalárního součinu není vektorový součin komutativní. Pro skalární součin obecně platí $\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{a}$, avšak vektorový součin mění při záměně pořadí vektorů $\vec{a},\vec{b}$ znaménko: $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$. Říkáme, že vektorový součin je

antikomutativní. Tuto vlastnost si za chvíli pro obecné vektory $\vec{a}, \vec{b}$ dokážeme – plyne lehce ze souřadnicového vyjádření vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$.

Poznamenejme, že vektorový součin libovolné z dvojic souřadnicových vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ si můžeme snadno zapamatovat z následujícího diagramu:



Postupujeme-li ve směru šipek, je vektorovým součinem dvou po sobě jdoucích vektorů třetí vektor s kladným znaménkem, postupujeme-li proti směru šipek, musíme u třetího z vektorů (výsledného vektorového součinu) změnit znaménko, např. $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$. Vektorový součin dvou stejných souřadnicových vektorů je roven nulovému vektoru – plyne to buď přímo z definice vektorového součinu ($\varphi = 0$) nebo z výpočtu v souřadnicích.

V následující větě si shrneme všechny důležité vlastnosti vektorového součinu, jejich platnost plyne bez dlouhého počítání ze souřadnicového vyjádření vektorového součinu (z determinantů). Přímo z definice vektorového součinu bychom je dokazovali mnohem hůře.

Věta 1.2: Nechť $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R$, kde $k \in R$. Pak platí :

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ (antikomutativní zákon)

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(distributivní zákony)

3) $k.(\vec{a} \times \vec{b}) = (k.\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k.\vec{b})$.

Důkaz: Všechny vzorce plynou bez problémů z pravidel pro počítání s determinanty. Např.

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -(\vec{a} \times \vec{b}),$$

neboť vyměníme-li v determinantu dva řádky, determinant změní znaménko. Podobně

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

analogicky $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$.
Poslední vztah také dokážeme snadno, neboť platí:

$$k.(\vec{a} \times \vec{b}) = k. \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ k.a_1 & k.a_2 & k.a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ k.b_1 & k.b_2 & k.b_3 \end{vmatrix}.$$

Dokázali jsme, že vektorový součin splňuje distributivní zákony. Na první pohled by se mohlo zdát, že splňuje také zakon asociativní, tedy že dva vektory $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ jsou stejné. To však obecně neplatí, neboť např. pro $\vec{a} = \vec{e}_1$, $\vec{b} = \vec{e}_1$, $\vec{c} = \vec{e}_2$ dostaneme

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) \times \vec{e}_2 = \vec{o} \times \vec{e}_2 = \vec{o},$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{e}_1 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 .$$

Za chvíli uvidíme, že $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ jsou obecně skutečně dva různé vektory, neboť platí

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \bullet \vec{a}).\vec{b} - (\vec{c} \bullet \vec{b}).\vec{a}, \;\; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}).\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}).\vec{c}.$$

Vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ má dokonce svůj speciální název: dvojný vektorový součin.

Praktické počítání s vektory si procvičíme v následujících příkladech.

Příklad 1.1: Vypočítejte vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$, znáte-li
a) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
b) $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = 2.\vec{a} - (5, -15, 10)$.

Řešení: V případě a) je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (5, -3, 1) .$$

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je přitom skutečně kolmý na vektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, neboť $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{a} = (5, -3, 1) \bullet (2, 3, -1) = 10-9-1 = 0$ a $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{b} = (5, -3, 1) \bullet (1, 2, 1) = 5-6+1 = 0$. To je odlišné od případu b): pro vektor $\vec{b} = (-3, 9, -6)$ totiž platí $\vec{b} = -3.\vec{a}$ (vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou kolineární), takže

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Příklad 1.2: Najděte jednotkový vektor $\vec{n}_0$, který je kolmý k rovině procházející body $P = [1, -1, 0]$, $Q = [2, 1, -1]$, $R = [-1, 1, 2]$.

Řešení: Vypočítejme si nejdříve dva vektory, které v dané rovině leží, např. $\overrightarrow{PQ} = (2-1, 1-(-1), -1-0) = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{PR} = (-1-1, 1-(-1), 2-0) = (-2, 2, 2)$. Pak vektor $\vec{n}$, který je kolmý k oběma vektorům $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, je jejich vektorovým součinem, tedy

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} .\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} .\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} .\vec{e}_3 =$$

$$(4-(-1).2).\vec{e}_1 - (2-(-1).(-2)).\vec{e}_2 + (2-2.(-2)).\vec{e}_3 = 6.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2 + 6.\vec{e}_3 = (6, 0, 6)\,.$$

Jednotkový vektor (vektor délky jedna) odtud snadno dostaneme, když vydělíme vektor $\vec{n}$ jeho délkou $\sqrt{6^2+0^2+6^2} = \sqrt{36} = 6.\sqrt{2}$. Odtud

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{||\vec{n}||} = \frac{(6, 0, 6)}{6.\sqrt{2}} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.\vec{e}_2\,.$$

Protože orientace vektoru normály nebyla zadaná, dostáváme dvě řešení :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\,.$$

Příklad 1.3: Určete obsah P trojúhelníka ABC s vrcholy $A = [3, 1, 4]$, $B = [0, 2, 1]$ a $C = [5, 0, 8]$.

Řešení: Obsah P vypočítáme jako polovinu obsahu rovnoběžníku $ABCD$ určeného vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1, -3)$ a $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (2, -1, 4)$ (zbývající vrchol $D = [2, 1, 5]$ bychom snadno určili ze vztahu $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$). Je tedy

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|/2 = |(1, 6, 1)|/2 = \sqrt{1+36+1}/2 = \sqrt{38}/2\,.$$

Příklad 1.4: Zjistěte velikost vektoru $\vec{v} = (3.\vec{a} - 2.\vec{b}) \times (\vec{a} - 4.\vec{b})$, jestliže $||\vec{a}|| = 1$, $||\vec{b}|| = 3$ a úhel φ sevřený vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je roven $5\pi/6$.

Řešení: Zřejmě je

$$||\vec{v}|| = ||3.\vec{a} \times \vec{a} - 12.\vec{a} \times \vec{b} - 2.\vec{b} \times \vec{a} + 8.\vec{b} \times \vec{b}||\,.$$

Protože však $\vec{a} \times \vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{b}$ musí být nulové vektory a navíc $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, takže $-12.\vec{a} \times \vec{b} - 2.\vec{b} \times \vec{a} = -10.\vec{a} \times \vec{b}$, dostáváme

$$||\vec{v}|| = 10.||\vec{a} \times \vec{b}|| = 10.||\vec{a}||.||\vec{b}||.\sin\varphi = 10.1.3.1/2 = 15\,.$$

Příklad 1.5: S využitím vektorového součinu vypočítejte obsah P rovnoběžníka $ABCD$, jsou-li dány jeho úhlopříčky $\overrightarrow{AC} = 2.\vec{a} - \vec{b}$ a $\overrightarrow{DB} = 4.\vec{a} - 5.\vec{b}$, kde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou nekomplanární jednotkové vektory, které svírají úhel $\pi/4$.

Řešení: Můžeme použít přímý výpočet

$$
\begin{aligned}
P = {} & \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \|((\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})/2) \times ((\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB})/2)\| = \\
& \|(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) \times (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB})\|/4 = \|(6.\vec{a} - 6.\vec{b}) \times (-2.\vec{a} + 4.\vec{b})\|/4 = \\
& \frac{6.2}{4} \cdot \|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2.\vec{b})\| = 3.\|\vec{a} \times \vec{a} - 2.\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} + 2.\vec{b} \times \vec{b}\| = \\
& 3.\| - \vec{a} \times \vec{b}\| = 3.\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 3.\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| \sin(\pi/4) = 3.1.1.1/\sqrt{2} = 3/\sqrt{2}\,.
\end{aligned}
$$

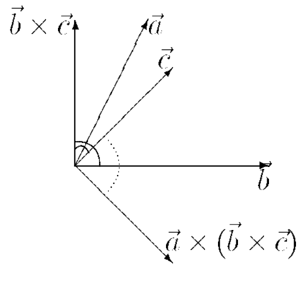
Kratší je však výpočet využívající vztahu mezi stranami a úhlopříčkami rovnoběžníku $ABCD$

$$
\begin{aligned}
P = {} & \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{DB}\|/2 = \|(2.\vec{a} - \vec{b}) \times (4.\vec{a} - 5.\vec{b})\|/2 = \\
& \|8.\vec{a} \times \vec{a} - 10.\vec{a} \times \vec{b} - 4.\vec{b} \times \vec{a} + 5.\vec{b} \times \vec{b}\|/2 = \| - 6.\vec{a} \times \vec{b}\|/2 = \\
& 6/2.\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 3.\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| \sin(\pi/4) = 3.1.1.1/\sqrt{2} = 3/\sqrt{2}\,.
\end{aligned}
$$

Víme už, že vektorový součin nesplňuje asociativní zákon, tedy že vektory $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ a $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ jsou různé. Pro libovolné vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ (dále budeme pracovat i s libovolným vektorem $\vec{d} \in R^3$) však platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a} \bullet \vec{b})$$

($\vec{a} \bullet \vec{c}$ i $\vec{a} \bullet \vec{b}$ v tomto vztahu jsou pouhá reálná čísla). Výraz $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ na levé straně rovnice nazýváme **dvojným vektorovým součinem** vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v tomto pořadí); tedy dvojným vektorovým součinem vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je jistý vektor, který je lineární kombinací vektorů $\vec{b}, \vec{c}$ a současně je kolmý na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b} \times \vec{c}$. Je to vidět z obrázku a také z výrazu na pravé straně rovnice, neboť $\vec{a} \bullet \vec{c}$ i $\vec{a} \bullet \vec{b}$ jsou reálné konstanty. Na obrázku také vidíme, že vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ je kolmý na $\vec{b}$ i $\vec{c}$, (a také vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ je kolmý na $\vec{a}$); přitom vektory $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou komplanární.



Platnost vzorce pro dvojný vektorový součin můžeme ověřit přímým výpočtem vektoru $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ na levé straně rovnice a vektoru $\vec{b}.(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a} \bullet \vec{b})$ na straně pravé. Porovnáním koeficientů u vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ pro oba tyto vektory zjistíme, že jsou shodné. Ukážeme si tento výpočet pro srovnání koeficientů např. u souřadnicového vektoru $\vec{e}_1$. Na levé straně máme

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) \times \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$(a_2.b_1.c_2 - a_2.b_2.c_1 + a_3.b_1.c_3 - a_3.b_3.c_1).\vec{e}_1 + (\ldots).\vec{e}_2 + (\ldots).\vec{e}_3 \,.$$

Stejný koeficient $a_2.b_1.c_2 - a_2.b_2.c_1 + a_3.b_1.c_3 - a_3.b_3.c_1$ u vektoru $\vec{e}_1$ přitom dostaneme pro vektor $\vec{b}.(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a} \bullet \vec{b})$ na pravé straně rovnice:

$$\begin{aligned}
&(b_1, b_2, b_3).(a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3) - (c_1, c_2, c_3).(a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3) = \\
&[b_1.(a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3) - c_1.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3)].\vec{e}_1 + (\ldots).\vec{e}_2 + (\ldots).\vec{e}_3 = \\
&(a_1.b_1.c_1 + a_2.b_1.c_2 + a_3.b_1.c_3 - a_1.b_1.c_1 - a_2.b_2.c_1 - a_3.b_1.c_3).\vec{e}_1 + \\
&\hspace{14em}(\ldots).\vec{c}_1 + (\ldots).\vec{c}_3 = \\
&(a_2.b_1.c_2 + a_3.b_1.c_3 - a_2.b_2.c_1 - a_3.b_3.c_1).\vec{e}_1 + (\ldots).\vec{e}_2 + (\ldots).\vec{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Užitím vzorce pro dvojný vektorový součin lze dokázat mnoho identit, které platí mezi vektory. Uveďme alespoň tři z nich i s krátkými důkazy:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}.(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{a}.(\vec{b} \bullet \vec{c}) \,, \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}].\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].\vec{d} \,, \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet (\vec{c} \times \vec{d}) &= \begin{vmatrix} \vec{a} \bullet \vec{c} & \vec{a} \bullet \vec{d} \\ \vec{b} \bullet \vec{c} & \vec{b} \bullet \vec{d} \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

První vztah ověříme snadno přímým výpočtem

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -(\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = -\vec{a}.(\vec{c} \bullet \vec{b}) - \vec{b}.(\vec{c} \bullet \vec{a}) =$$

$$\vec{b}.(\vec{c} \bullet \vec{a}) - \vec{a}.(\vec{c} \bullet \vec{b}) \,.$$

Ve druhém vztahu jde geometricky o vektor, který leží jak v rovině určené vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (je totiž kolmý k $\vec{a} \times \vec{b}$), tak v rovině určené vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ (je rovněž kolmý k $\vec{c} \times \vec{d}$). Celkově má vektor

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c}.((\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{d}) - \vec{d}.((\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}) =$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}].\vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].\vec{d}$$

směr průsečnice roviny určené vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ s rovinou, která je určena vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ (na konkrétním umístění žádné z těchto dvou rovin v R^3 přitom nezáleží). Pro pochopení třetího vztahu označme $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$. Pak můžeme psát

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{u} \bullet (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{u}, \vec{c}, \vec{d}] = (\vec{u} \times \vec{c}) \bullet \vec{d} = ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) \bullet \vec{d} =$$

$$-(\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})) \bullet \vec{d} = -(\vec{a}.(\vec{c} \bullet \vec{b}) - \vec{b}.(\vec{c} \bullet \vec{a})) \bullet \vec{d} = (\vec{b} \bullet \vec{d}).(\vec{a} \bullet \vec{c}) - (\vec{a} \bullet \vec{d}).(\vec{c} \bullet \vec{b}),$$

což je právě uvedený determinant.

Příklad 1.6: Vypočítejte dvojný vektorový součin $\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, je-li $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{b} = (5, -1, 3)$ a $\vec{c} = (0, 6, 1)$.

Řešení: S využitím jedné z odvozených vlastností dvojného vektorového součinu dostáváme

$$\vec{v} = \vec{b}.(\vec{a} \bullet \vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a} \bullet \vec{b}) =$$

$$(5, -1, 3).((1, -2, 4) \bullet (0, 6, 1)) - (0, 6, 1).((1, -2, 4) \bullet (5, -1, 3)) =$$

$$-8.(5, -1, 3) - 19.(0, 6, 1) = (-40, -106, -43).$$

Vektor $\vec{v}$ je skutečně lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$: $\vec{v} = -8.\vec{b} - 19.\vec{c}$. Dále je

$$\vec{a} \bullet \vec{v} = (1, -2, 4) \bullet (-40, -106, -43) = -40 + 212 - 172 = 0,$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \bullet \vec{v} = (-19, -5, 30) \bullet (-40, -106, -43) = 760 + 530 - 1290 = 0,$$

tedy vektor $\vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b} \times \vec{c}$. Vektor $\vec{v}$ bychom mohli určit i bez skalárního násobení: pracnějším postupem (který vyžaduje výpočet 2 determinantů třetího řádu) bychom postupně dospěli ke stejnému výsledku

$$\vec{v} = (1, 2, -4) \times ((5, -1, 3) \times (0, 6, 1)) =$$

$$(1, 2, -4) \times (-19, -5, 30) = (-40, -106, -43).$$

Dvojný vektorový součin má ještě jednu zajímavou geometrickou vlastnost: lze jej využít k rozkladu zadaného vektoru do dvou složek, z nichž jedna má zadaný směr a druhá je na tento směr kolmá (geometricky tedy jde o kolmý průmět vektoru do roviny a do její normály).

Příklad 1.7: Rozložte v R^3 vektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ do směru vektoru $\vec{a} = (2, -1, 1)$ a do směru vektoru $\vec{d}$ kolmého na $\vec{a}$.

Řešení: Vektor $\vec{d}$ musí být kolmý na $\vec{a}$ i na $\vec{v} \times \vec{a}$, takže

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{v} \times \vec{a}) = \vec{v}.(\vec{a} \bullet \vec{a}) - \vec{a}.(\vec{a} \bullet \vec{v}) = ||\vec{a}||^2.\vec{v} - (\vec{a} \bullet \vec{v}).\vec{a} =$$

$$6.\vec{v} - 3.\vec{a} = (0, 15, 15).$$

Odtud $\vec{v} = \frac{1}{6} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} = \frac{1}{6} \cdot (0, 15, 15) + \frac{1}{2} \cdot (2, -1, 1)$.

Skalární a vektorový součin se často objevují ve fyzikálních a obecně technických úlohách; tak např. práci síly na nějaké dráze lze interpretovat jako skalární součin, zatímco při výpočtu otáčivého momentu se neobejdeme bez vektorového součinu. Barevné tečky na zapnutém televizoru se pohybují podle zákonů elektromagnetismu, které využívají jak skalární, tak vektorový součin: ve dvou ze čtveřice slavných Maxwellových rovnic najdeme skalární součin, ve dvou součin vektorový.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 1.8: Vypočítejte obsah rovnoběžníka $ABCD$, jestliže $A = [4, -3, 6]$, $B = [0, 1, 0]$, $D = [-2, -2, 2]$.

Výsledek: Obsah rovnoběžníka je roven 30.

Příklad 1.9: Určete jednotkový vektor kolmý k daným vektorům $\vec{a} = 2.\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{b} = \vec{e}_+2.\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Výsledek: Dostaneme dva vektory $-\frac{1}{35} \cdot (-1, 3, 5)$, $\frac{1}{35} \cdot (-1, 3, 5)$.

Příklad 1.10: Vypočítejte obsah a velikost výšek rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\vec{a} = 2.\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2.\vec{e}_3$.

Výsledek: $P = \sqrt{21}, v_1 = v_2 = \sqrt{21/5}$.

Příklad 1.11: Vypočítejte dvojný vektorový součin $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, pro dané vektory $a = 2.\vec{e}_1$, $\vec{b} = 3.\vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

Výsledek: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = 6.\vec{e}_2$.

2 Smíšený součin vektorů a jeho vlastnosti

Jsou-li $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, vektory v R^3, má reálné číslo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ zcela určitý geometrický význam: absolutní hodnota tohoto čísla je objemem V rovnoběžnostěnu, jehož tři sousední hrany jsou určeny vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Součin $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ nazýváme **smíšeným vektorovým součinem** vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; běžně pro něj budeme používat zkrácené označení $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. V tomto definičním vzorci záleží na pořadí vektorů: např. $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, tedy při lichém počtu změn v pořadí vektorů změní jejich smíšený součin znaménko. Vyjádříme-li vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ v jednotlivých složkách (čili v ortonormálních souřadnicích v R^3), dostaneme podle definice skalárního a vektorového součinu jednoduchý vzorec pro výpočet smíšeného součinu

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tento vzorec lze snadno ověřit na základě definice skalárního a vektorového součinu: zřejmě platí

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\bullet(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_1,a_2,a_3)\bullet \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

ale také

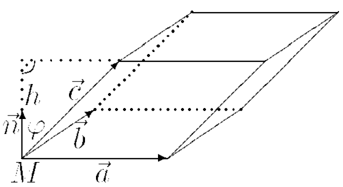
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2.\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3.\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$(a_1,a_2,a_3)\bullet\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right) = (a_1,a_2,a_3)\bullet \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Z tohoto odvození také vidíme, že výměnou dvou vektorů v uspořádané trojici $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jejich smíšený součin skutečně vždy změní znaménko, jak ihned plyne z vlastností determinantů. Dále je zřejmé, že $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$, právě když aspoň jeden z vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ je nulový nebo vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ jsou lineárně závislé, a tedy komplanární (lze je umístit v jediné rovině). V následující větě se zaměříme na již zmiňované (ale zatím nedokázané) tvrzení o geometrickém významu smíšeného součinu:

Věta 2.1: Umístíme-li tři lineárně nezávislé vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ v R^3 do společného bodu M a sestrojíme-li rovnoběžnostěn s hranami $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (podle obrázku), platí pro objem V takového rovnoběžnostěnu

$$V = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|.$$



Důkaz: Uvažujme jednotkový vektor $\vec{n}$ kolmý na vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Zřejmě je

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{||\vec{a}\times\vec{b}||}.$$

Výška h rovnoběžnostěnu je rovna délce průmětu vektoru $\vec{c}$ do směru $\vec{n}$. Svírají-li vektory $\vec{c}$ a $\vec{n}$ úhel φ, platí tedy

$$|\vec{c}\bullet\vec{n}| = ||\vec{c}||.||\vec{n}||.|\cos\varphi| = ||\vec{c}||.|\cos\varphi| = ||\vec{c}||\cdot\frac{h}{||\vec{c}||} = h,$$

z čehož dostaneme

$$h = |\vec{c} \cdot \vec{n}| \,.$$

Protože obsah základny rovnoběžnostěnu určené vektory $\vec{a}, \vec{b}$ je roven $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, vychází

$$V = h.\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot \vec{n}|.\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}|.\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \,.$$

Všimněme si ještě, že každý rovnoběžnostěn lze rozdělit na dva trojboké hranoly stejného objemu s vrcholy ve vrcholech původního rovnoběžnostěnu; každý z těchto trojbokých hranolů lze obdobným způsobem ještě dále rozdělit na tři čtyřstěny . Objem čtyřstěnu o zadaném vrcholu M s hranami $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ z předchozí věty tedy je $V_* = V/6$. Chceme-li využít důkazu předchozí věty, můžeme ke stejnému závěru dospět i výpočtem

$$V_* = \frac{1}{3} \cdot \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{2} \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot h = \frac{V}{6} \,.$$

Příklad 2.1: Vypočítejte smíšený součin vektorů $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, 2, 3)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$.

Řešení:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 3 + 6 - 1 - 6 = 3 \,.$$

Příklad 2.2: Čtyřstěn je určen body $A = [-4, 4, -2]$, $B = [0, 3, 1]$, $C = [-2, -4, 3]$ a $D = [1, -5, 4]$. Zjistěte jeho objem V_* a vzdálenost δ vrcholu D od stěny ABC.

Řešení: Označme $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = (5, -9, 6)$, $\vec{b} = \overrightarrow{BD} = (1, -8, 3)$ a $\vec{c} = \overrightarrow{CD} = (3, -1, 1)$. Pak

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 1 & -8 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -3 & 6 \\ -8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 65 - 24 = 41 \,,$$

hledaný objem je tedy $V_* = 41/6$. Pro geometrickou představu můžeme použít obrázek z předešlé věty; A, B, C jsou koncové body vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, místo bodu M zde máme zadaný vrchol D. Podstava ABC má hrany určené vektory $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = (4, -1, 3)$ a $\vec{v} = \vec{c} - \vec{b} = (2, 7, -2)$. Pro obsah P podstavy ABC tedy platí $2.P = \|u \times v\|$, přitom

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \left|\left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \right)\right| =$$

$$(2-21, 8+6, 28+2) = (-19, 14, 30)\,,$$

takže

$$2.P = |(-19, 14, 30)| = \sqrt{361+196+900} = \sqrt{1457}\,.$$

Pro hledanou vzdálenost δ tedy dostaneme

$$\delta = V_*/P = \frac{41/6}{\sqrt{1457}/2} = \frac{41}{3.\sqrt{1457}}\,.$$

Vzdálenost δ bychom mohli vyčíslit také ze vzorce pro vzdálenost bodu D od roviny zadané body A, B a C; tomuto postupu se budeme věnovat podrobněji, až se budeme v rámci analytické geometrie zabývat vzdálenostmi v R^3.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 2.3: Zjistěte, pro kterou hodnotu reálného parametru $\alpha \in R$ vlastnosti $0 \le \alpha \le 4$ má čtyřstěn o vrcholech $A = [0, 0, 0]$, $B = [\alpha, \alpha, \alpha]$, $C = [\alpha, 2, 0]$ a $D = [-1, 0, 1]$ maximální objem a pro kterou degeneruje v trojúhelník.

Výsledek: Objem zadaného čtyřstěnu je $\alpha.(4-\alpha)/6$; maximální (rovný 4) je pro $\alpha = 2$, minimální (nulový) pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = 4$.

Příklad 2.4: Jsou dány body $A = [1, 2, -3], B = [0, 7, -1], C = [4, -5, -9]$. Najděte bod D tak, aby ležel na ose x a rovnoběžnostěn určený body $ABCD$ měl objem 48.

Výsledek: Úloha má dvě řešení $D_1 = [-7/2, 0, 0], D_2 = [5/2, 0, 0]$.

Příklad 2.5: Dokažte, že dané body $A = [1, 2, -1], B = [0, 1, 5], C = [-1, 2, 1]$, $D = [2, 1, 3]$ leží v jedné rovině, ale neleží na jedné přímce.

Příklad 2.6: Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{a} = 3.\vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2$, $\vec{b} = 2.\vec{e}_1 + 3.\vec{e}_2$, $\vec{c} = \vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 + 3.\vec{e}_3$, obsah stěny sestrojené nad vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a velikost výšky na tuto stěnu.

Výsledek: $V = 15$, $P = 5$, výška $v = 3$.

3 Rovnice roviny

V řadě příkladů jsme poukázali na geometrickou interpretaci vektorů v R^3 a operací s nimi. Ve zbytku tohoto učebního textu uplatníme v jistém smyslu obrácený přístup – jednotlivé geometrické objekty v R^3 budeme studovat s využitím znalostí vektorů v R^3. Nejprve se seznámíme s možnými tvary rovnic rovin a přímek, pak se budeme zabývat jejich vzájemnými polohami, průniky, vzdálenostmi a dalšími vlastnostmi.

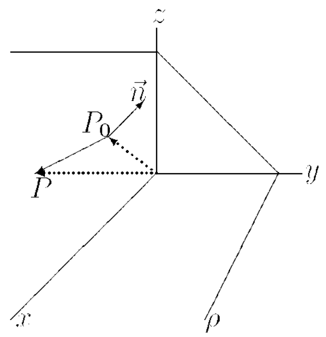
Při studiu geometrických objektů v R^3 (na rozdíl od formálních operací s vektory) musíme vždy nejprve vymezit umístění geometrických objektů. Chcemeli studovat rovnice roviny ρ, tj. jistého lineárního podprostoru R^3 dimenze 2, zvolme pevně nějaký bod $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ roviny ρ a uvažujme nenulový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$ kolmý k této rovině. Je-li $P = [x, y, z]$ libovolný bod roviny ρ (obecně různý od pevně zvoleného bodu P_0), tvoří vektor $\vec{n}$ a vektor s počátečním bodem P_0 a koncovým bodem P vzájemně ortogonální dvojici vektorů (speciálně pro $P = P_0$ je druhý z těchto vektorů nulový). Platí tedy

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$$

neboli $(a, b, c) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$. Tuto rovnost můžeme přepsat ve tvaru $a.(x - x_0) + b.(y - y_0) + c.(z - z_0) = 0$ nebo také

$$a.x + b.y + c.z + d = 0\,, \quad \text{kde } d = -a.x_0 - b.y_0 - c.z_0\,.$$

Tento tvar nazýváme **obecnou rovnicí roviny** ρ, příslušný vektor $\vec{n}$ pak nazýváme **normálovým vektorem roviny** ρ.



Ukážeme si nyní, že libovolná rovnice zapsaná v tomto tvaru je za předpokladu, že aspoň jedno z čísel $a, b, c \in R$ je nenulové (což můžeme zapsat ve formě podmínky $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ čili $\|(a, b, c)\| \neq 0$), vždy skutečně rovnicí roviny v R^3. Vyberme libovolný pevný bod $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$, který splňuje rovnici $a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 + d = 0$. Vzájemným odečtením rovnic $a.x + b.y + c.z + d = 0$ a $a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 + d = 0$ ihned dostaneme $a.(x - x_0) + b.(y - y_0) + c.(z - z_0) = 0$. Vidíme tedy, že $(a, b, c) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, což nás přivádí zpět k výchozí rovnici

$$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \text{pro } \vec{n} = (a, b, c) \ \text{ a } \ \overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\,,$$

jde tedy vždy o rovnici roviny v R^3.

Rovinu ρ, jež prochází bodem P_0 kolmo k vektoru $\vec{n} = (a, b, c)$, můžeme určit také **vektorovou rovnicí roviny**

$$\vec{n} \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0\,,$$

v němž $\vec{r} = (x, y, z)$ můžeme interpretovat jako polohový vektor obecného bodu P a $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ jako polohový vektor pevně zvoleného bodu $P_0 \in \rho$ (viz obrázek). Vektor $\vec{n}$ není ovšem určen jednoznačně: rovnice

$$\vec{m} \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0\,,$$

v níž $\vec{m} = k.\vec{n}$ pro jakékoli nenulové reálné číslo k, je také vektorovou rovnicí téže roviny ρ a obdobně rovnice

$$(k.a).x + (k.b).y + (k.c).z + (k.d) = 0$$

je rovněž obecnou rovnicí roviny ρ. V praxi někdy pracujeme jen s jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n}$ – i jeho výběr je však dvojznačný, zpravidla však není důležité, které orientaci vektoru $\vec{n}$ bychom měli dávat přednost.

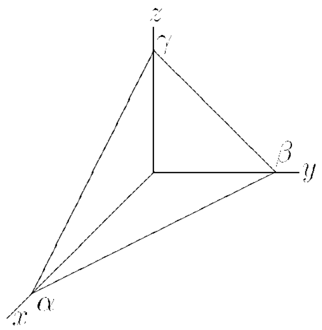
Je-li $d = 0$, protíná rovina ρ všechny souřadnicové osy v počátku souřadnic, případně může jednu i dvě ze souřadnicových os obsahovat. Ve všech ostatních případech lze obecnou rovnici roviny ρ dělit číslem $-d$; dostáváme tedy

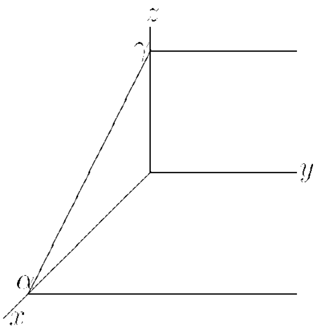
$$-(a/d).x - (b/d).y - (c/d).z = 1\,.$$

Z této rovnice již dokážeme snadno určit, jaké úseky vytíná rovina ρ na souřadnicových osách: např. položíme-li $y = z = 0$ (tj. zabýváme se pouze body na ose x), obdržíme $-(a/d).x = 1$, tedy pokud $a \neq 0$ ihned $x = -d/a$, což je hledaný úsek na ose x. Za předpokladu $a = 0$ dostaneme neřešitelnou rovnici $0.x = 1$, která říká, že rovina nemá s osou x žádný reálný průsečík, a je s ní tedy rovnoběžná. Za dodatečných předpokladů $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $c \neq 0$ jsme tedy schopni určit čísla $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$ a $\gamma = -d/c$, která udávají úseky vyťaté rovinou ρ na osách x, y, z. Dostáváme tak **úsekovou rovnici roviny** ρ

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\,.$$

Levá část obrázku ukazuje polohu roviny ρ vůči osám souřadnic: viditelné jsou stopy roviny na souřadnicových rovinách (v deskriptivní geometrii „průmětnách“) a část roviny v prvním oktantu v případě $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $c \neq 0$, pravá část obrázku názorně ukazuje, co se změní v případě $a \neq 0$, $b = 0$ a $c \neq 0$. Vrátíme-li se ještě k předchozímu obrázku (s jehož pomocí jsme odvozovali rovnice roviny), vidíme, že zde bylo $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $c \neq 0$; průnik roviny ρ s osou x ovšem nebyl viditelný, protože úsek α vyšel záporný.





Představme si nyní, že na obrázku, na němž jsme ukázali odvození obecné rovnice roviny ρ, jsme do bodu P_0 umístili takovou dvojici nekolineárních vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ z R^3, která leží v rovině ρ. Protože vektory $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou komplanární, můžeme každý vektor $\vec{r}$, jenž má počáteční bod $P_0 \in \rho$ a koncový bod v rovině ρ (tedy i vektor s koncovým bodem P), zapsat ve tvaru

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s.\vec{u} + t.\vec{v}\,,$$

kde s a t jsou reálné parametry. Rozepíšeme-li tuto vektorovou rovnici do složek, dostaneme **parametrickou rovnici roviny** ρ

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s.u_1 + t.v_1\,, \\ y &= y_0 + s.u_2 + t.v_2\,, \\ z &= z_0 + s.u_3 + t.v_3\,. \end{aligned}$$

Je-li rovina určena bodem $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, snadno získáme její obecnou rovnici z podmínky komplanárnosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a vektoru s počátečním bodem P_0 a koncovým bodem $P = [x, y, z]$ s využitím smíšeného součinu trojice vektorů. Pro komplanární vektory totiž platí

$$[\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}] = 0\,,$$

a tedy

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

odtud už snadno vychází obecná rovnice zadané roviny. Přímo můžeme také najít normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ jako vektorový součin libovolných dvou nekolineárních vektorů, které leží v rovině ρ, tedy např. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Příklad 3.1: Najděte parametrickou a obecnou rovnici roviny ρ, která je určena body $A = [4, 4, 4]$, $B = [-1, 10, -4]$ a $C = [2, -2, 5]$.

Řešení: Zvolíme např. jako počáteční bod (dosud P_0) bod $A = [4, 4, 4]$ a dále

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-5, 6, -8)\,, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2, -6, 1)\,.$$

Parametrický tvar rovnice roviny ρ je tedy

$$\begin{aligned} x &= 4 - 5.s - 2.t\,, \\ y &= 4 + 6.s - 6.t\,, \\ z &= 4 - 8.s + t\,, \end{aligned}$$

kde $s, t \in R$. Uvažujeme-li obecný bod P roviny ρ, vyjde obecná rovnice této roviny snadno ze smíšeného součinu

$$[\,\overrightarrow{AP}\,, \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AC}\,] = 0$$

neboli

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Rozvojem uvedeného determinantu podle prvního řádku dostáváme postupně

$$\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}.(x-4) - \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.(y-4) + \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}.(z-4) = 0\,,$$

$$(6-48).(x-4) - (-5-16).(y-4) + (30+12).(z-4) = 0\,,$$

$$-42.(x-4) + 21.(y-4) + 42.(z-4) = 0\,,$$

$$2.(x-4) - (y-4) - 2.(z-4) = 0\,,$$

$$2.x - y - 2.z + 4 = 0\,.$$

Jiný postup výpočtu využívá znalosti normálového vektoru

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,,$$

čili po složkách

$$\vec{n} = (a, b, c) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rozvojem uvedeného determinantu podle prvního řádku vychází

$$\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}.\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}.\vec{e}_3 =$$

$$(6-48).\vec{e}_1 - (-5-16).\vec{e}_2 + (30+12).\vec{e}_3 =$$

$$-42.\vec{e}_1 + 21.\vec{e}_2 + 42.\vec{e}_3 = -21.(2.\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3)\,,$$

je tedy možné volit $a = 2$, $b = -1$ a $c = -2$. Reálný parametr d jsme tímto postupem neurčili, víme však, že rovnici $a.x + b.y + c.z + d = 0$ musí vyhovovat např. souřadnice bodu A, tj. $2.4 - 4 - 2.4 + d = 0$, takže $d = 4$.
Protože víme, že všechny tři body A, B, C leží v rovině ρ, mohli bychom dokonce přímo i bez znalosti vektorového nebo smíšeného násobení vektorů v R^3 sestavit a např. Gaussovou eliminací řešit soustavu 3 lineárních algebraických rovnic pro 4 neznámé a, b, c, d; tento postup by však byl pracnější než oba předešlé.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 3.2: Určete a) parametrický b) obecný c) úsekový tvar rovnice roviny ρ, jestliže rovina ρ prochází body $A = [2, 3, 1], B = [3, 1, 4], C = [2, 1, 5]$.

Výsledek: Parametrický tvar roviny

$$\rho : \quad x = 2 + s, \quad y = 3 - 2.s + t, \quad z = 1 + 3.s - 2.t,$$

obecný tvar $\rho : x + 2.y + z - 9 = 0$, úsekový tvar

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{9/2} + \frac{z}{9} = 1\,.$$

Příklad 3.3: Určete rovnici roviny ρ, která
a) je rovnobežná se souřadnou rovinou xz a prochází bodem $A = [2, -5, 3]$
b) prochází osou z a bodem $A = [-3, 1, -2]$
c) je rovnoběžná s osou x a prochází body $B = [4, 0, -2]$, $C = [5, 1, 7]$.

Výsledek: a) $\rho :\ y + 5 = 0$ b) $\rho :\ x + 3.y = 0$ c) $\rho :\ 9.y - z - 2 = 0$.

4 Rovnice přímky

Víme už, že máme-li zadán nějaký pevný bod, můžeme v prostoru R^3 přisoudit každému lineárnímu podprostoru dimenze 2 geometrický význam roviny. Jak brzy uvidíme, můžeme obdobně přisoudit každému lineárnímu podprostoru dimenze 1 geometrický význam přímky. Z dřívějšího středoškolského studia matematiky také víme, že (použijeme-li už zavedenou terminologii) v prostoru R^2 lze přímky interpretovat jako lineární podprostory dimenze 1. Tedy můžeme přiřadit každé přímce v R^2 jedinou obecnou rovnici typu $a.x+b.y+c = 0$ pro $a, b, c \in R$, formálně analogickou obecné rovnici roviny v R^3. Jak vzápětí uvidíme, popis přímky v R^3 tak snadný nebude – budeme mít totiž tři parametrické rovnice pro jednotlivé souřadnice v R^3, z nichž jediný parametr nelze vyloučit takovým způsobem, aby k popisu přímky postačovala jediná rovnice.

Přímka v prostoru R^3 je zřejmě určena buď dvěma body, kterými prochází, nebo jedním takovým bodem a směrovým vektorem z R^3, s nímž je rovnoběžná.

První případ (se dvěma body) můžeme snadno převést na druhý (směrový vektor určíme jako rozdíl polohových vektorů zadané dvojice bodů), a nemusíme se jím tedy zvlášť zabývat. Rovnici přímky můžeme zapsat několika způsoby; jejich odvození je zřejmé z následujícího obrázku. Uvažujme přímku p, která prochází bodem $P = [x_0, y_0, z_0]$ a je rovnoběžná s nenulovým vektorem $\vec{s} = (a, b, c)$, obecný bod přímky p označme $P = [x, y, z]$. S použitím polohového vektoru $\vec{r}_0$ bodu P_0 a polohového vektoru $\vec{r}$ bodu P dostáváme $\vec{r} - \vec{r}_0 = t.\vec{s}$ a odtud snadno **vektorovou rovnici přímky** p

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t.\vec{s}$$

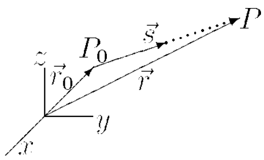
pro libovolné reálné číslo t. Rozepsáním do složek x, y, z dostáváme dále **parametrické rovnice přímky** p

$$x = x_0 + a.t\,, \quad y = y_0 + b.t\,, \quad z = z_0 + c.t\,, \quad t \in R\,.$$

Vyloučením parametru t z parametrických rovnic, není-li žádné z čísel a, b, c rovno nule (aspoň jedno musí být vždy nenulové v důsledku předpokladu $\|\vec{s}\| \neq 0$), dostaneme ještě **kanonickou rovnici přímky** p

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

ve skutečnosti jde o dvě rovnice, z nichž každou lze považovat za rovnici jisté roviny. Není-li podmínka $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ plněna, není použití kanonické rovnice vhodné (lze jí přisoudit jen symbolický význam).



Příklad 4.1: Zapište parametrický a kanonický tvar rovnice přímky p, která prochází body $P = [1, 1, -2]$ a $Q = [3, 4, \alpha - 2]$, kde α je reálný parametr.

Řešení: Zřejmě je $\vec{s} = \overrightarrow{PQ} = (2, 3, \alpha)$. Odtud snadno dostáváme parametrické rovnice přímky p

$$x = 1 + 2.t\,, \quad y = 1 + 3.t\,, \quad z = -2 + \alpha.t\,, \quad t \in R\,.$$

i její kanonickou rovnici

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 2}{\alpha}\,.$$

Pro $\alpha = 0$ ovšem druhá z rovnic

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{3}\,, \quad \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 2}{\alpha}$$

není formálně korektní; udává jen, že přímka p je rovnoběžná se souřadnicovými osami x, y. Všimněme si také, že pro $t = 0$ dostáváme souřadnice bodu P a pro $t = 1$ souřadnice bodu Q. Parametrické rovnice přímky p bychom mohli zapsat např. i ve tvaru

$$x = 1 - 4.\tilde{t}\,, \quad y = 1 - 6.\tilde{t}\,, \quad z = -2 - 2.\alpha.\tilde{t}\,, \quad \tilde{t} \in R\,,$$

pak sice souřadnice bodu P dostáváme pro $\tilde{t} = 0$, ale souřadnice bodu Q pro $\tilde{t} = -1/2$.

Přímka p bývá také v R^3 často určena jako průsečnice dvou různoběžných rovin – k vzájemné poloze rovin se podrobněji vrátíme v následující části. Parametrickou rovnici přímky bychom v tomto případě mohli hledat jako společné řešení obecných rovnic dvou rovin, závislé na jistém parametru $t \in R$, kratší však bývá postup, který vyplývá z následující věty.

Věta 4.1: Nechť jsou dány dvě různoběžné roviny v prostoru R^3 – rovina ρ_1 o obecné rovnici $a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1 = 0$ a rovina ρ_2 o obecné rovnici $a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2 = 0$; přitom $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in R$. Pak směrovým vektorem přímky $p = \rho_1 \cap \rho_2$ je vektor $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, kde $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ a $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ jsou normálové vektory rovnic ρ_1 a ρ_2. Pro souřadnice vektoru $\vec{s} = (a, b, c)$ tedy platí

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\,, \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}\,, \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\,.$$

Důkaz: Skutečnost, že $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ jsou normálovými vektory rovin ρ_1 a ρ_2, jsme využili už při odvození obecné rovnice roviny. Protože roviny ρ_1 a ρ_2 nejsou rovnoběžné, nemohou být vektory $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ ani kolineární. Jejich vektorovým součinem $\vec{s}$ je tedy nenulový vektor, který je kolmý na vektory $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$, a leží tedy současně v rovině ρ_1 i v rovině ρ_2. Závěrečný vzorec pak snadno vychází z výpočtu tohoto vektorového součinu v jednotlivých souřadnicích.

Příklad 4.2: Najděte parametrické rovnice přímky p, která je zadána jako průsečnice dvou rovin ρ_1 o obecné rovnici $3.x + y - 2.z - 13 = 0$ a ρ_2 o obecné rovnici $x + 2.y - 2.z - 11 = 0$.

Řešení: Podle předcházející věty má směrový vektor $\vec{s} = (a, b, c)$ přímky p složky

$$a = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2\,, \quad b = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4\,,$$

$$c = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5\,.$$

Roviny ρ_1 a ρ_2 protínají rovinu $z = 0$ (v deskriptivní geometrii „půdorysnu“) postupně v přímkách $3.x + y = 13$, $x + 2.y = 11$. Vidíme, že tyto přímky se protínají v bodě A=[3,4,0] – stačí vypočítat z dvojice lineárních algebraických rovnic souřadnice x a y. Parametrické rovnice přímky p, která nutně prochází bodem A, tedy mohou být např.

$$x = 3 + 2.t\,, \quad y = 4 + 4.t\,, \quad z = 5.t\,, \quad t \in R\,.$$

I bez znalosti věty 4.1 můžeme odvodit tytéž rovnice Jordanovou variantou Gaussovy eliminace

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 13 \\ 1 & 2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 5 & -4 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 15 & 0 & -6 & 45 \\ 0 & 5 & -4 & 20 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 5 & -4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Abychom dostali výsledek ve stejném tvaru, zvolíme nyní opět $z = 5.t$ pro reálný parametr t, tedy hodnost matice soustavy i matice rozšířené je 2. Dostáváme $x = (15 + 2.5.t)/5 = 3 + 2.t$ a $y = (20 + 4.5.t)/5 = 4 + 4.t$.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 4.3: Určete
a) parametrický tvar přímky p
b) kanonický tvar rovnice přímky p
c) přímku p jako průsečnici dvou různoběžných rovin,
jestliže přímka p prochází danými body $A = [2, 9, 3], B = [5, 3, 11]$.

Výsledek: Parametrický tvar

$$p: \quad x = 2 + 3.t, \quad y = 9 - 6.t, \quad z = 3 + 8.t\,,$$

kanonický tvar

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-9}{-6} = \frac{z-3}{8}\,,$$

dále $p = \alpha \cap \beta$, kde roviny $\alpha:\ 2.x + y - 13 = 0$, $\beta:\ 8.x - 3.z - 7 = 0$.

Příklad 4.4: Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q, jsou-li zadány takto:
a) $p: x = 4, y = 5 + t, z = 1 + 2.t, q: x - y - z - 4 = 0, x + y - 3.z = 0$
b) $p: x = -1 + 3.t, y = -7 + 2.t, z = 4 - t, q: x = 2 + 3.t, y = -5 - 2.t, z = 3 - t$.

Výsledek: a) přímky jsou mimoběžné ($p \cap q = \emptyset$) b)přímky jsou různoběžné, $p \cap q = [2, -5, 3]$.

5 Úlohy o rovinách a přímkách

Umíme již pracovat s vektory v pravoúhlé souřadnicové soustavě: pro vektor $\vec{u}$ s počátečním bodem $A = [x_1, y_1, z_1]$ a koncovým bodem $B = [x_2, y_2, z_2]$ je délkou vektoru $\vec{u}$ (neboli jeho normou v prostoru R^3) číslo

$$||\vec{u}|| = ||(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,,$$

toto kladné číslo je zároveň vzdáleností bodů A, B. Máme tak připraveny nástroje pro řešení úloh o přímkách a rovinách. Soustředíme se přitom postupně na:

a) vzdálenost bodu od přímky,

b) vzájemnou polohu a úhel dvou přímek,

c) vzdálenost dvou rovnoběžných nebo mimoběžných přímek,

d) vzdálenost bodu od roviny,

e) vzájemnou polohu a úhel dvou rovin,

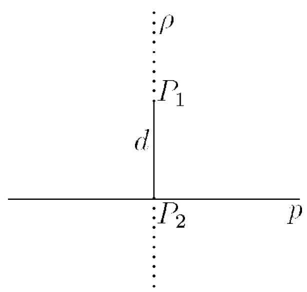
f) vzájemnou polohu a úhel přímky a roviny,

g) svazek rovin,

h) průmět bodu na přímku a do roviny, průmět přímky do roviny.

a) Vzdálenost bodu od přímky

Neleží-li daný bod P_1 na přímce p, můžeme určit vzdálenost bodu P_1 od přímky p. Bodem P_1 proložíme rovinu ρ kolmou k přímce p. Označíme-li P_2 průsečík přímky p s touto rovinou (tedy $P_2 = p \cap \rho$), je hledaná vzdálenost d bodu P_1 od přímky p rovna délce vektoru s počátečním bodem P_1 a koncovým bodem P_2. Najít rovinu ρ je snadné, neboť její normálový vektor je směrovým vektorem přímky p. Průmětna na obrázku je pro jednoduchost zvolena tak, že obsahuje přímku p; celá rovina ρ (naznačená tečkovaně) se pak promítne do jediné přímky kolmé na p:



Příklad 5.1: Určete vzdálenost bodu $A = [2, -1, 3]$ od přímky p zadané rovnicemi $x = -1 + 3.t$, $y = -2 + 4.t$, $z = 1 + 5.t$ pro $t \in R$.

Řešení: Rovina ρ procházející bodem A a současně kolmá k dané přímce p má normálový vektor $\vec{n} = (3, 4, 5)$, a tedy obecnou rovnici $3.x + 4.y + 5.z + d = 0$. Z podmínky $A \in \rho$ dostaneme $6 - 4 + 15 + d = 0$; odtud $d = -17$, takže rovina ρ má obecnou rovnici $3.x + 4.y + 5.z - 17 = 0$. Průsečík $B = p \cap \rho$ najdeme snadno dosazením parametrické rovnice přímky p do obecné rovnice roviny ρ

$$3.(-1 + 3.t) + 4.(-2 + 4.t) + 5.(1 + 5.t) - 17 = 0\,,$$

odtud dostaneme $t = 23/50$. Bod B má pak souřadnice $x = -1 + (3.23)/50 = 19/50$, $y = -2 + (4.23)/50 = -8/50$, $z = 1 + (5.23)/50 = 165/50$. Vzdálenost d bodu A od přímky p lze pak už snadno vypočítat jako vzdálenost bodů A a B

$$d = \sqrt{(19/50 - 2)^2 + (-8/50 + 1)^2 + (165/50 - 3)^2} = 3.\sqrt{38}/10\,.$$

b) Vzájemná poloha a úhel dvou přímek

O dvou přímkách v R^3 říkáme, že jsou

i) totožné, právě když mají společné všechny body,

ii) různoběžné, právě když mají společný jediný bod (tzv. průsečík),

iii) rovnoběžné, právě když nemají společný žádný bod a jejich směrové vektory jsou kolineární (v deskriptivní geometrii se v tomto případě hovoří o společném nevlastním bodu, který však nepatří do R^3),

iv) mimoběžné, právě když nemají společný žádný bod a jejich směrové vektory nejsou kolineární.

Jiný počet společných bodů není možný: hledáme-li totiž společné body přímky p popsané parametrickými rovnicemi

$$x = x_1 + a_1.t\,, \quad y = y_1 + b_1.t\,, \quad z = z_1 + c_1.t, \quad t \in R$$

a přímky q popsané parametrickými rovnicemi

$$x = x_2 + a_2.s\,, \quad y = y_2 + b_2.s\,, \quad z = z_2 + c_2.s\,, \quad s \in R\,,$$

kde x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, a_1, b_1, c_1 a a_2, b_2, c_2 jsou zadané trojice reálných čísel, dostáváme pro neznámé parametry t a s soustavu tří lineárních algebraických rovnic

$$\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix},$$

jejíž počet řešení určuje Frobeniova věta. V případech iii) a iv) má smysl zjišťovat také vzdálenost přímek – této úloze se ještě budeme věnovat samostatně.

Úhel dvou přímek snadno určíme z úhlu jejich směrových vektorů. Je však třeba si uvědomit, že přímky nejsou orientované a jejich úhel může být pouze číslo mezi 0 a $\pi/2$, zatímco úhel φ dvou vektorů (obvykle zjišťovaný z jejich skalárního součinu) může nabývat hodnot od 0 až do π (pro $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$).

Příklad 5.2: Přímka p je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = 1 - 3.t\,, \quad y = 1 - 2.t\,, \quad z = t\,, \quad t \in R$$

a přímka q parametrickými rovnicemi

$$x = 2.s\,, \quad y = 2 + 3.s\,, \quad z = \alpha.s\,, \quad s \in R\,.$$

Najděte všechny takové hodnoty parametru $\alpha \in R$, pro něž nejsou přímky p a q mimoběžné, a určete v tomto případě úhel přímek p a q.

Řešení: Společný bod přímek p a q v R^3 (existuje-li) musí splňovat podmínky

$$1 - 3.t = 2.s\,, \quad 1 - 2.t = 2 + 3.s\,, \quad t = \alpha.s\,,$$

které lze vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Gaussovou eliminací obdržíme

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3.\alpha+2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3.\alpha+2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3.\alpha+3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Podle Frobeniovy věty je tato soustava řešitelná právě v případě $\alpha = -1$: postupně vychází $s = -1$ a $t = (1 - 2.(-1))/3 = 1$, takže přímky p a q jsou různoběžné a protínají se v jediném společném bodě $A = [-2, -1, 1]$. Nezávisle na poloze bodu A lze určit jejich úhel ψ: pro úhel φ jejich směrových vektorů $(-3, -2, 1)$ a $(2, 3, -1)$ platí

$$\cos\varphi = \frac{(-3,-2,1)\cdot(2,3,-1)}{\sqrt{9+4+1}.\sqrt{9+4+1}} = \frac{-6-6-1}{14} = -13/14\,,$$

což odpovídá úhlu $\varphi > \pi/2$. Pro hledaný úhel ψ tedy platí $\cos\psi = 13/14$ neboli $\psi = \arccos(13/14) \approx 0{,}380251$.

c) Vzdálenost dvou rovnoběžných nebo mimoběžných přímek

Umíme-li vypočítat vzdálenost bodu od přímky, umíme také určit vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p a q v R^3: tato vzdálenost je rovna vzdálenosti libovolného bodu na jedné z přímek, např. nějakého bodu P na přímce p, od druhé z přímek, zde tedy q.

Příklad 5.3: Přímka p je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = 1 + 2.t\,, \quad y = 3.t\,, \quad z = 5 - t\,, \quad t \in R$$

a přímka q parametrickými rovnicemi

$$x = 2 + 4.s\,, \quad y = 6.s\,, \quad z = 1 - 2.s\,, \quad s \in R\,.$$

Ověřte, že přímky p a q jsou rovnoběžné a zjistěte jejich vzdálenost d v R^3.

Řešení: Přímka p má směrový vektor $\vec{u} = (2, 3, -1)$, přímka q má směrový vektor $\vec{v} = (4, 6, -2) = 2.\vec{u}$, vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou tedy kolineární. Takže obě přímky jsou buď totožné nebo rovnoběžné, vyjde-li jejich vzdálenost $d \neq 0$, jsou rovnoběžné. Na přímce p zvolme (pro parametr $t = 0$) bod $P = [1, 0, 5]$. Rovina ρ vedená bodem P kolmo k přímkám p i q má normálový vektor $\vec{u}$, tedy obecnou rovnici $2.x + 3.y - z + d = 0$ pro jisté $d \in R$, tuto rovnici však musí splňovat i souřadnice bodu P, takže $d = -2.1 - 3.0 + 5 = 3$. Průsečík Q přímky q s rovinou ρ je tedy určen hodnotou parametru s, která vyhovuje rovnici $2.(2 + 4.s) + 3.6.s - (1 - 2.s) + 3 = 0$, z níž vychází $28.s = -6$ neboli $s = -3/14$, takže $Q = [8/7, -9/7, 10/7]$. Jako vzdálenost bodů P a Q pak vychází

$$d = \sqrt{(1 - 8/7)^2 + (9/7)^2 + (5 - 10/7)^2} = \sqrt{1^2 + 9^2 + 25^2}/7 = \sqrt{707}/7$$

$$= \sqrt{7.101}/7 = \sqrt{101/7}\,.$$

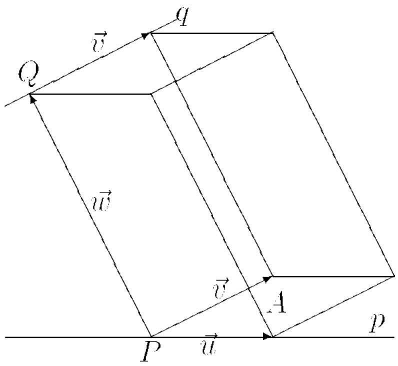
Komplikovanější postup musíme použít, chceme-li vypočítat vzdálenost dvou mimoběžných přímek p, q. Nechť tedy $p \cap q = \emptyset$ jsou mimoběžné přímky, kde přímka p je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = x_1 + a_1.t\,, \quad y = y_1 + b_1.t\,, \quad z = z_1 + c_1.t\,, \quad t \in R$$

a přímka q parametrickými rovnicemi

$$x = x_2 + a_2.s\,, \quad y = y_2 + b_2.s\,, \quad z = z_2 + c_2.s\,, \quad s \in R;$$

x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, a_1, b_1, c_1 a a_2, b_2, c_2 jsou opět předem známé trojice reálných čísel. Zvolme libovolné body $P = [x_1, y_1, z_1] \in p$ a $Q = [x_2, y_2, z_2] \in p_2$. Dále uvažujme vektor $\vec{w}$ s počátečním bodem P a koncovým bodem Q.



Rovnoběžnostěn znázorněný na obrázku, který je určen vektory $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ a $\vec{w} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ má objem $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$. Současně však $V = d.A$, kde d značí výšku rovnoběžnostěnu, a tedy nejkratší vzdálenost uvažovaných mimoběžek p a q, a A je obsahem podstavy rovnoběžnostěnu, tedy obsahem rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Pro výpočet vzdálenosti d mimoběžných přímek p a q tak dostáváme jednoduchý výsledný vzorec

$$d = \frac{V}{A} = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|}{||\vec{u} \times \vec{v}||}.$$

Příklad 5.4: Přímka p je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = 2 + 2.t\,, \quad y = 1 + 4.t\,, \quad z = -1 - t\,, \quad t \in R$$

a přímka q parametrickými rovnicemi

$$x = -31 + 3.s\,, \quad y = 6 + 2.s\,, \quad z = 3 + 6.s\,, \quad s \in R\,.$$

Určete vzdálenost přímek p a q.

Řešení: Pro stručnost budeme důsledně používat označení z předchozí úvahy. Směrové vektory přímek p a q jsou $\vec{u} = (2, 4, -1)$ a $\vec{v} = (3, 2, 6)$, ze zvolených bodů $P = [2, 1, -1]$ a $Q = [-31, 6, 3]$ (pro $t = 0$ a $s = 0$) dostaneme vektor $\vec{w} = (33, -5, -4)$. Známým způsobem můžeme vypočítat

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 33 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -965\,, \quad V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 965\,,$$

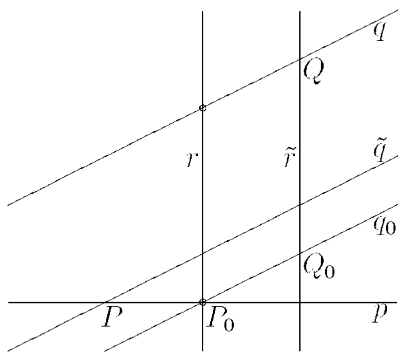
ale také

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (26, -15, -8)\,,$$

$$A = ||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{26^2 + 15^2 + 8^2} = \sqrt{965}\,.$$

Celkově tedy dostáváme $d = V/A = \sqrt{965}$.

Ke stejnému výsledku je možné dospět i složitějším konstruktivním postupem, známým z deskriptivní geometrie, který nám připomíná obrázek. Proložíme-li totiž bodem P rovinu ρ obsahující přímku p a přímku $\tilde{q}$ rovnoběžnou s přímkou q a označíme-li Q_0 kolmý průmět bodu Q do roviny ρ, tj. průsečík kolmice $\tilde{r}$ spuštěné z bodu Q do roviny ρ s touto rovinou, je délka d rovna vzdálenosti bodu Q od bodu Q_0. Vedeme-li navíc bodem Q_0 v rovině ρ přímku q_0 rovnoběžnou s přímkou q (tedy vlastně kolmý průmět přímky q do roviny ρ), leží její průsečík P_0 s přímkou p na zvláštní přímce r, tzv. ose mimoběžných přímek p a q. Tato osa je nutně různoběžná s přímkami p i q a současně kolmá k oběma těmto přímkám, přitom vzdálenost jejích průsečíků s těmito přímkami je nejmenší možná a právě rovna d. Na stejném příkladu si však ukážeme ještě jiný, často kratší postup pro určení uvedené osy.



Příklad 5.5: Určete osu mimoběžných přímek p a q z příkladu 5.4.

Řešení: I zde zachováme nezměněné označení z předchozí úvahy. Označíme-li navíc $\vec{n}$ vektor normály k rovině ρ, a tedy směrový vektor přímek $\tilde{r}$ a r, dostáváme

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (26, -15, -8)\,.$$

Zvolme $P = [2, 1, -1]$ a $Q = [-31, 6, 3]$. Protože rovina ρ musí obsahovat bod P, dostáváme

$$26.(x-2) - 15.(y-1) - 8.(z+1) = 0\,,$$

odtud již vychází obecná rovnice roviny ρ

$$26.x - 15.y - 8.z - 45 = 0\,.$$

Přímka $\tilde{r}$ má parametrické rovnice

$$x = -31 + 26.\tilde{h}\,, \quad y = 6 - 15.\tilde{h}\,, \quad z = 3 - 8.\tilde{h}\,, \quad \tilde{h} \in R\,,$$

její průsečík s rovinou ρ musí odpovídat parametru $\tilde{h}$ vyhovujícímu podmínce

$$26.(-31 + 26.\tilde{h}) - 15.(6 - 15.\tilde{h}) - 8.(3 - 8.\tilde{h}) - 45 = 0\,,$$

odtud po úpravě dostaneme $(26^2 + 15^2 + 8^2).\tilde{h} = 965$ a tedy $\tilde{h} = 1$, celkem $Q_0 = [-5, -9, -5]$. Nyní bychom už mohli snadno určit vzdálenost bodů Q, Q_0

$$d = \sqrt{(-31+5)^2 + (6+9)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{965}$$

(vyšla stejně, jako jiným postupem v předchozím příkladě). Přímka q_0 má parametrické rovnice

$$x = -5 + 3.s\,, \quad y = -9 + 2.s\,, \quad z = -5 + 6.s\,, \quad s \in R\,,$$

její průsečík s přímkou p pak můžeme najít pomocí soustavy tří lineárních algebraických rovnic o dvou neznámých parametrech t a s

$$2 + 2.t = -5 + 3.s, \;\; 1 + 4.t = -9 + 2.s, \;\; -1 - t = -5 + 6.s$$

neboli v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix},$$

která má jediné řešení $t = -2$ a $s = 1$. Máme tak $P_0 = [-2, -7, 1]$, tedy hledaná osa r má parametrické rovnice

$$x = -2 + 26.h\,, \quad y = -7 - 15.h\,, \quad z = 1 - 8.h\,, \quad h \in R\,.$$

Na závěr si ukážeme ještě jiný způsob řešení úlohy hledání vzdálenosti a osy mimoběžek. Zvolme libovolné body $\tilde{P} = [2 + 2.t, 1 + 4.t, -1 - t] \in p$ pro $t \in R$ a $\tilde{Q} = [-31 + 3.s, 6 + 2.s, 3 + 6.s] \in q$ pro $s \in R$. Směrový vektor $\vec{v} = (-2.t + 3.s - 33, -4.t + 2.s + 5, t + 6.s + 4)$ spojnice bodů $\tilde{P}, \tilde{Q}$ je rovnoběžný s vektorem $\vec{u} = (2, 4, -1) \times (3, 2, 6) = (26, -15, -8)$, a tedy $\vec{v} = \alpha.\vec{u}$, kde $\alpha \in R$. Ze soustavy 3 rovnic pro 3 neznámé

$$-2.t + 3.s - 33 = 26.\alpha\,, \quad -4.t + 2.s + 5 = -15.\alpha\,, \quad t + 6.s + 4 = -8.\alpha$$

snadno vypočítáme $\alpha = -1$, $s = 1$ a $t = -2$. Dostáváme tak body $\tilde{P} = [-2, -7, 1]$ (tento bod je shodný s bodem P_0 z předešlého postupu) a $\tilde{Q} = [-28, 8, 9]$, těmito body je určena osa přímek p, q. Vzdálenost přímek p, q je potom rovna vzdálenosti bodů $\tilde{P}, \tilde{Q}$

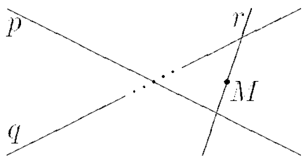
$$d = \sqrt{(-26)^2 + 15^2 + 8^2} = \sqrt{965}\,.$$

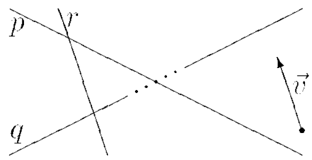
Osa mimoběžek je speciálním případem tzv. **příčky mimoběžek**. Příčku r mimoběžek p, q definujeme jako přímku, která je s každou z těchto mimoběžek různoběžná, tedy existují body $\tilde{P} = p \cap r$, $\tilde{Q} = q \cap r$. Pro zadané mimoběžky p, q existuje nekonečně mnoho příček r, protože k určení obecné příčky mimoběžek stačí zvolit libovolně body $P \in R$, $Q \in R$, kterými prochází. Obvykle proto hledáme mezi všemi příčkami takovou, která splňuje nějakou další podmínku. Pokud taková příčka existuje, je určena jednoznačně. Nejčastěji hledáme příčku mimoběžek p, q

1) procházející zadaným bodem M,

2) rovnoběžnou se zadaným vektorem $\vec{w}$.

Osou mimoběžek je právě příčka, která je rovnoběžná s vektorem kolmým k oběma mimoběžkám. Vzdálenost průsečíků $\tilde{P} = p \cap r$, $\tilde{Q} = q \cap r$ je pak vzdáleností mimoběžek p, q; takto jsme počítali vzdálenost mimoběžných přímek v předchozím příkladu. Vypočítejme si nyní dva příklady na hledání příčky mimoběžek, která prochází daným bodem M resp. je rovnoběžná s daným vektorem $\vec{w}$.





Příklad 5.6: Najděte příčku r mimoběžek p, q, která prochází bodem $M = [1, 3, -2]$, jsou-li přímky p, q zadány parametrickými rovnicemi

$$p: \quad x = 3 + s\,,\ y = -1 - s\,,\ z = 4 + 2.s\,,\ s \in R\,,$$

$$q: \quad x = -1 + 2.t\,,\ y = 2\,,\ z = -2 + t\,,\ t \in R\,.$$

Ověřte, že přímky p, q jsou skutečně mimoběžné.

Řešení: Mimoběžnost přímek p, q můžeme dokázat buď přímo vyřešením systému 3 rovnic pro 2 neznámé $s, t \in R$ pro jejich průsečík, nebo užitím smíšeného součinu. Rovnice, které určují průsečík, jsou tvaru

$$3 + s = -1 + 2.t\,,\ -1 - s = 2\,,\ 4 + 2.s = -2 + t\,,$$

tyto rovnice však nemají řešení a tedy průsečík neexistuje ($p \cap q = \emptyset$).
Také bychom mohli vypočítat smíšený součin směrových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ přímek s vektorem $\overrightarrow{AB}$, kde $A \in p$, $B \in q$ jsou libovolně zvolené body na přímkách p, q. Tedy např. pro $A = [3, -1, 4]$, $B = [-1, 2, -2]$ vychází

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\,] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,,$$

odtud plyne, že vektory $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$ nejsou komplanární (neleží v jedné rovině) a tedy p, q jsou mimoběžné.
Příčku r procházející bodem M dostaneme snadno z podmínky kolinearity vektorů $\overrightarrow{M\tilde{P}}$, $\overrightarrow{M\tilde{Q}}$, kde $\tilde{P} = [3+s, -1-s, 4+2.s] \in p$, $\tilde{Q} = [-1+2.t, 2, -2+t] \in q$ jsou neznámé průsečíky $\tilde{P} = p \cap r$, $\tilde{Q} = q \cap r$. Podmínka

$$\overrightarrow{M\tilde{P}} = k.\overrightarrow{M\tilde{Q}}\,,\ k \in R$$

je tvaru

$$(2+s\,, -4-s\,, 6+2.s) = k.(-2+2.t\,, -1\,, t)\,,$$

rozepsáním do souřadnic máme 3 rovnice pro 3 neznámé $k\,, s\,, t \in R$:

$$2+2.s = -2.k + 2.k.t\,,\ -4-s = -k\,,\ 6+2.s = k.t\,.$$

Tato soustava má jediné řešení $k = 1/2, s = -2, t = 1$.
Hledaná příčka je tedy určena body průsečíků $\tilde{P} = [1, 1, 0]$ (pro $s = -2$), $\tilde{Q} = [1, 2, -1]$ (pro hodnotu parametru $t = 1$) a má parametrické rovnice např.

$$r: \quad x = 1\,,\ y = 1+m\,,\ z = -m\,,\ m \in R\,.$$

(Příčku r bychom také mohli hledat jako průsečnici dvou různoběžných rovin $r = \alpha \cap \beta$, kde $p \subset \alpha$, $M \in \alpha$, $q \subset \beta$, $M \in \beta$.)

Příklad 5.7: Najděte příčku r mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w} = (1, -2, 3)$, jsou-li přímky p, q zadány parametricky

$$p: \quad x = -1+s\,,\ y = 1+s\,,\ z = -5+2.s\,,\ s \in R\,,$$

$$q: \quad x = 1+t\,,\ y = -2+3.t\,,\ z = 3-t\,,\ t \in R\,.$$

Řešení: Mimoběžnost přímek p, q už ověřovat nebudeme, příčku r najdeme opět z podmínky kolinearity vektorů $\vec{w}$, $\overrightarrow{\tilde{P}\tilde{Q}}$, kde $\tilde{P} = [-1+s, 1+s, -5+2.s] \in p$, $\tilde{Q} = [1+t, -2+3.t, 3-t] \in q$ jsou prozatím neznámé body průsečíků příčky r s mimoběžkami p, q. Podmínka

$$\overrightarrow{\tilde{P}\tilde{Q}} = k.\vec{w}$$

je přitom tvaru

$$(2+t-s, -3+3.t-s, 8-t-2.s) = k.(1, -2, 3)\,,$$

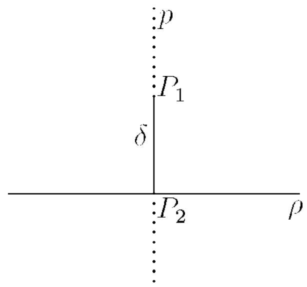
neboli $2+t-s = k\,, -3+3.t-s = -2.k\,, 8-t-2.s = 3.k$.
Dostaneme jediné řešení $k = 1, s = 2, t = 1$ a odtud body průsečíků $\tilde{P} = [1, 3, -1]$ (pro $s = 2$), $\tilde{Q} = [2, 1, 2]$ (pro $t = 1$). Tedy hledaná příčka r je např. tvaru

$$r: \quad x = 1+m\,,\ y = 3-2.m\,,\ z = -1+3.m\,,\ m \in R\,.$$

(Také v tomto případě bychom mohli příčku r najít jako průsečnici dvou rovin, $r = \alpha \cap \beta$, kde $p \subset \alpha$, $\vec{w} \parallel \alpha$, $q \subset \beta$, $\vec{w} \parallel \beta$.)

d) Vzdálenost bodu od roviny

Abychom se vysvětlili, jak se určuje vzdálenost bodu P_1, který neleží v rovině ρ, od této roviny, můžeme použít téměř stejný obrázek jako při obdobné úvaze o vzdálenosti bodu od přímky. Pouze přímka p na obrázku je kolmice k zadané rovině ρ, která je pro jednoduchost znázorněna v poloze kolmé na průmětnu, a $P_2 = p \cap \rho$. Pro usnadnění výpočtu vzdálenosti P_1 od roviny ρ, tj. vzdálenosti δ bodů P_1 a P_2, odvodíme jednoduchý vzorec.



Máme určit vzdálenost bodu $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ od roviny ρ zadané obecnou rovnicí $a.x + b.y + c.z + d = 0$. Protože průsečík $P_2 = [x_2, y_2, z_2]$ přímky p s rovinou ρ leží v rovině ρ, musí platit $a.x_2 + b.y_2 + c.z_2 + d = 0$. Označme $\vec{n} = (a, b, c)$ normálový vektor roviny ρ (a tedy směrový vektor přímky p). Dostáváme

$$|a.x_1 + b.y_1 + c.z_1 + d| = |a.(x_2 - x_1) + b.(y_2 - y_1) + c.(z_2 - z_1)| =$$

$$|\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_1P_2}\,| = ||\vec{n}||.||\,\overrightarrow{P_1P_2}\,|| = ||\vec{n}||.\delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\delta\,.$$

Odtud ihned plyne vzorec pro určení vzdálenosti bodu P_1 od roviny ρ

$$\delta = \frac{|a.x_1 + b.y_1 + c.z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Délku normálového vektoru roviny ρ můžeme volit libovolně, jen musí být různá od nuly. V případě $||\vec{n}|| = 1$ se tento vzorec ještě zjednoduší na tvar

$$\delta = |a.x_1 + b.y_1 + c.z_1 + d|\,.$$

Například pro vzdálenost libovolné roviny od počátku souřadnic potom dostaneme přímo $\delta = |d|$.

Příklad 5.8: Najděte vzdálenost bodu $A = [0, 2, 1]$ od roviny ρ, která vytíná na souřadnicových osách x, y, z úseky $3, -1, 4$.

Řešení: Vyjdeme z úsekové rovnice roviny ρ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{4} = 1\,,$$

která odpovídá obecné rovnici

$$4.x - 12.y + 3.z - 12 = 0\,.$$

Normálovým vektorem roviny ρ je tedy např. vektor $\vec{n} = (4, -12, 3)$ o délce $\|\vec{n}\| = \sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{169} = 13$, dostáváme tedy

$$\delta = |4.0 - 12.2 + 3.1 - 12|/13 = 33/13\,.$$

e) Vzájemná poloha a úhel dvou rovin

O dvou rovinách v R^3 říkáme, že jsou

i) totožné, právě když mají společné všechny body,

ii) různoběžné, právě když mají společnou jedinou přímku,

iii) rovnoběžné, právě když nemají společný žádný bod (v deskriptivní geometrii se v tomto případě hovoří o společné nevlastní přímce, která však nepatří do R^3).

V případě ii) má smysl určovat (nenulový) úhel dvou rovin, v případě iii) jejich (nenulovou) vzdálenost. Známe-li obecnou rovnice roviny ρ_1

$$a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1 = 0$$

i obecnou rovnici roviny ρ_2

$$a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2 = 0\,,$$

kde $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ jsou zadaná reálná čísla, dokážeme o vzájemné poloze rovin rozhodnout podle hodnosti (tj. počtu lineárně nezávislých řádků nebo sloupců) $h(M)$ a $h(N)$ matic

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Při uvedeném označení platí následující věta.

Věta 5.1: Platí-li

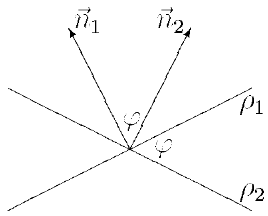
i) $h(M) = h(N) = 1$, jsou roviny ρ_1, ρ_2 totožné,

ii) $h(M) = 2$, jsou roviny ρ_1, ρ_2 různoběžné,

iii) $h(M) = 1$ a $h(N) = 2$, jsou roviny ρ_1, ρ_2 rovnoběžné.

Důkaz: Podmínka $h(M) = 2$ (a tedy také $h(N) = 2$) vyjadřuje, že normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ a $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ nejsou kolineární, odtud plyne ii). Tyto vektory jsou naopak kolineární v případě $h(M) = 1$, takže normálové vektory obou rovin splývají. Jsou-li však kolineární i vektory (a_1, b_1, c_1, d_1) a (a_2, b_2, c_2, d_2) v R^4, což odpovídá podmínce $h(N) = 1$, popisují obě obecné rovnice jedinou rovinu. To v opačném případě neplatí; tak rozlišíme i) a iii).

Ke každé dvojici rovin ρ_1 a ρ_2 můžeme najít rovinu, která je k oběma rovinám kolmá. Prohlásíme-li ji za průmětnu, zobrazí se při kolmém promítání obě roviny do přímek, a úhel, který svírají, bude viditelný ve skutečné velikosti. Jak ukazuje obrázek, lze tento úhel podobně jako úhel dvou přímek jednoduše určit jako úhel vektorů $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$:



Příklad 5.9: Rovina ρ_1 je dána obecnou rovnicí $\sqrt{2}.x + y - z - 10 = 0$, rovina ρ_2 obecnou rovnicí $\sqrt{2}.x - y - z = 0$. Určete úhel, který svírají roviny ρ_1 a ρ_2.

Řešení: Rovina ρ_1 má normálový vektor $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 1, -1)$, rovina ρ_2 má normálový vektor $\vec{n}_2 = (\sqrt{2}, -1, -1)$. Tyto vektory svírají úhel φ, pro který platí

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2} + 1.(-1) + (-1).(-1)}{\sqrt{2+1+1}\cdot\sqrt{2+1+1}} = \frac{1}{2},$$

je tedy $\varphi = \arccos(1/2) = \pi/3$. Protože $\varphi < \pi/2$, je φ přímo hledaným úhlem, který svírají roviny ρ_1 a ρ_2.

Příklad 5.10: Rovina ρ_1 je dána obecnou rovnicí $2.x + 7.y + \alpha.z - 10 = 0$, rovina ρ_2 obecnou rovnicí $\beta.x - 14.y + 5.z - 2 = 0$. Pro jaké hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in R$ jsou roviny ρ_1 a ρ_2 vzájemně kolmé a pro jaké hodnoty rovnoběžné?

Řešení: Normálový vektor roviny ρ_1 je $\vec{n}_1 = (2, 7, \alpha)$, normálový vektor roviny ρ_2 je $\vec{n}_2 = (\beta, -14, 5)$. Zřejmě je

$$\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = 2.\beta - 7.14 + \alpha.5 = 5.\alpha + 2.\beta - 98\,.$$

Roviny ρ_1 a ρ_2 budou kolmé, právě když tento skalární součin bude roven nule. K tomu můžeme zvolit jakékoli reálné β a dostaneme $\alpha = (98 - 2.\beta)/5$. Roviny

ρ_1 a ρ_2 budou rovnoběžné (podle předchozí věty), právě když matice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 7 & \alpha \\ \beta & -14 & 5 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 7 & \alpha & -10 \\ \beta & -14 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

mají hodnosti $h(M) = 1$ a $h(N) = 2$. Porovnáním druhého a čtvrtého sloupce matice N vidíme, že $h(N) = 2$ platí vždy (nezávisle na výběru α a β – roviny ρ_1 a ρ_2 tedy nemohou být totožné). Pro splnění $h(M) = 1$ musí být $\beta = -2.2$ a $5 = -2.\alpha$ čili $\alpha = -5/2$ a $\beta = -4$.

f) Vzájemná poloha a úhel přímky a roviny

O přímce a rovině v R^3 říkáme, že

i) přímka leží v rovině, právě když všechny body přímky patří do roviny,

ii) přímka je s rovinou různoběžná, právě když jejich průnik obsahuje jediný bod,

iii) přímka je s rovinou rovnoběžná, právě když jejich průnik je prázdný.

V případě ii) má smysl určovat (nenulový) úhel přímky s rovinou, v případě iii) (nenulovou) vzdálenost přímky od roviny.

Průnik přímky s rovinou jsme už několikrát počítali (např. v příkladu 5.3) – známe-li obecnou rovnici roviny a parametrické rovnice přímky, stačí dosazením parametrických rovnic přímky do obecné rovnice roviny zjistit hodnotu parametru, který odpovídá poloze hledaného průsečíku. Také určení úhlu φ, který svírá přímka s rovinou, dokážeme jednoduchým obratem převést na již známou úlohu hledání úhlu dvou přímek. Stačí si totiž uvědomit, že úhel $\pi/2 - \varphi$ musí svírat přímka s jakoukoli normálovou přímkou roviny.

Označíme-li směrový vektor přímky $\vec{u}$ a normálový vektor roviny $\vec{n}$, můžeme úhel φ také určit přímo užitím vztahu

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{||\vec{u}||.||\vec{n}||}\,.$$

Pro úhel ψ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{n}$ totiž platí

$$\cos\psi = \frac{\vec{u} \bullet \vec{n}}{||\vec{u}||.||\vec{n}||}$$

a přitom $|\cos\psi| = |\cos(\pi/2 \pm \varphi)| = |\sin\varphi|$. Absolutní hodnota $|\vec{u} \bullet \vec{n}|$ v čitateli přitom zaručuje, že pro výsledný úhel φ je $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Příklad 5.11: Zjistěte, zda pro některou hodnotu parametru $\alpha \in R$ svírá přímka p zadaná (jako průsečnice dvou rovin) rovnicemi $x - y + \alpha.z = 0$ a

$x - 2.y - z + 1 = 0$ úhel $\pi/6$ s rovinou ρ, která je zadaná obecnou rovnicí $x + y + z = 0$.

Řešení: Směrový vektor přímky p je tvaru

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & \alpha \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (1 + 2.\alpha, 1 + \alpha, -1)\,,$$

přitom rovina ρ má (nezávisle na volbě parametru α) normálový vektor $\vec{n} = (1, 1, 1)$, takže $\vec{u} \bullet \vec{n} = 1 + 2.\alpha + 1 + \alpha - 1 = 1 + 3.\alpha$.

Dále platí

$$||\vec{n}|| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}\,,$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(1 + 2.\alpha)^2 + (1 + \alpha)^2 + 1} = \sqrt{3 + 6.\alpha + 5.\alpha^2}\,.$$

Pro úhel ψ vektorů $\vec{u}$ a $\vec{n}$ tedy

$$\cos\psi = \frac{\vec{u} \bullet \vec{n}}{||\vec{u}||.||\vec{n}||} = \frac{1 + 3.\alpha}{\sqrt{5.\alpha^2 + 6.\alpha + 3}.\sqrt{3}}\,.$$

S ohledem na orientaci vektorů $\vec{u}$ a $\vec{n}$ smí být podle zadání buď $\psi = \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$ nebo $\psi = \pi - (\pi/2 - \pi/6) = 2.\pi/3$; v obou případech $\cos^2\psi = 1/4$. Dostáváme podmínku

$$1/4 = \frac{9.\alpha^2 + 6.\alpha + 1}{3.(5.\alpha^2 + 6.\alpha + 3)}$$

neboli

$$21.\alpha^2 + 6.\alpha - 5 = 0\,,$$

z této kvadratické rovnice již dostaneme dvě řešení

$$\alpha = \frac{-6 \pm \sqrt{456}}{42} = \frac{-3 \pm \sqrt{114}}{21}\,.$$

Hodnotu parametru α můžeme najít také užitím vzorce

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{||\vec{u}||.||\vec{n}||}\,.$$

Dostáváme

$$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{|1 + 3.\alpha|}{\sqrt{5.\alpha^2 + 6.\alpha + 3}.\sqrt{3}}\,,$$

a umocněním levé i pravé strany rovnice vychází stejná kvadratická rovnice

$$21.\alpha^2 + 6.\alpha - 5 = 0$$

jako v předchozím postupu.

g) Svazek rovin

Prozatím jsme se zabývali jen vzájemnou polohou dvojice rovin. Geometricky zajímavá však může být i vzájemná poloha tří rovin – připomeňme, že i souřadnicové roviny kartézské soustavy $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$ (v deskriptivní geometrii v uvedeném pořadí „nárysna“, „bokorysna“, „půdorysna“) jsou vlastně velmi speciální trojicí vzájemně kolmých rovin. Uvažujme tedy roviny ρ_1, ρ_2 a ρ_3, které mají postupně obecné rovnice

$$a_1.x+b_1.y+c_1.z+d_1 = 0\,, \quad a_2.x+b_2.y+c_2.z+d_2 = 0\,, \quad a_3.x+b_3.y+c_3.z+d_3 = 0\,.$$

Sestavme matice

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Toto označení použijeme v následující větě, která obměňuje větu 5.1 pro případ tří rovin.

Věta 5.2: Platí-li

i) $h(M) = 3$, protínají se roviny ρ_1, ρ_2 a ρ_3 v jediném bodě.

ii) $h(N) \neq h(M) < 3$, nemají roviny ρ_1, ρ_2 a ρ_3 žádný společný bod.

iii) $h(N) = h(M) < 3$, procházejí roviny ρ_1, ρ_2 a ρ_3, pokud nejsou všechny totožné, jedinou společnou přímkou.

Důkaz: K existenci jediného průsečíku v i) stačí, aby matice M byla regulární, tj. $h(M) = 3$ (a nutně též $h(N) = 3$). V případě $h(M) < 3$ je třeba posoudit, zda $h(N) \neq h(M)$ – pak totiž podle Frobeniovy věty v ii) společný bod všech tří rovin neexistuje. Jinak má soustava 3 obecných rovnic nekonečně mnoho řešení, což lze vyjádřit pomocí iii).

Příklad 5.12: Najděte takové číslo $\alpha \in R$, aby se roviny ρ_1, ρ_2 a ρ_3 zadané postupně rovnicemi

$$x - 3.y + z - 2 = 0\,, \quad x - y - z = 0\,, \quad x - 4y + 2z + \alpha = 0$$

protínaly v přímce.

Řešení: Podle předchozí věty má nastat případ iii). Zkoumejme tedy hodnosti matic

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Z Gaussovy eliminace, která zachovává hodnost matic, dostaneme

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2.\alpha+6 \end{bmatrix}.$$

V úvahu tedy přichází jedině případ $h(M) = h(N) = 2$, kdy potřebujeme $2.\alpha + 6 = 0$, a tedy $\alpha = -3$.

K obdobným výpočtům lze často využít tzv. svazku rovin. Jsou-li dány dvě různoběžné roviny ρ_1 a ρ_2 postupně obecnými rovnicemi

$$a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1 = 0\,, \quad a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2 = 0\,,$$

rozumíme **svazkem rovin** množinu všech rovin, které obsahují přímku p, jež je průsečnicí rovin ρ_1 a ρ_2, tato přímka se pak nazývá **osou svazku**. Jsou-li λ_1 a λ_2 libovolná reálná čísla, která nejsou současně rovna nule, má tedy každá rovina svazku obecnou rovnici

$$\lambda_1.(a_1.x + b_1.y + c_1.z + d_1) + \lambda_2.(a_2.x + b_2.y + c_2.z + d_2) = 0\,.$$

V literatuře se často setkáváme i s obdobným pojmem **svazku přímek**: ten můžeme zavést jako množinu všech přímek, které procházejí zadaným bodem v R^3 – typickým příkladem jsou souřadnicové osy x, y a z.

Příklad 5.13: Zapište rovnici libovolné roviny svazku rovin určeného rovinami ρ_1 a ρ_2 z příkladu 5.9 a s její pomocí navrhněte jiný postup řešení tohoto příkladu.

Řešení: Rovnice libovolné roviny svazku určeného rovinami ρ_1 a ρ_2 je

$$\lambda_1.(x - 3.y + z - 2) + \lambda_2.(x - y - z) = 0$$

pro reálné parametry λ_1 a λ_2. (Parametrické rovnice osy svazku zde hledat nemusíme.) Rovina ρ_3 patří tomuto svazku, právě když

$$\lambda_1.(x - 3.y + z - 2) + \lambda_2.(x - y - z) = x - 4.y + 2.z + \alpha$$

pro jisté hodnoty $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Úpravou této podmínky dostáváme

$$(\lambda_1 + \lambda_2).x + (-3.\lambda_1 - \lambda_2).y + (\lambda_1 - \lambda_2).z - 2.\lambda_1 = x - 4.y + 2.z + \alpha\,.$$

Je tedy třeba vyřešit soustavu 4 rovnic pro 3 neznámé $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ tvaru

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1\,, \quad -3.\lambda_1 - \lambda_2 = -4\,, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2,\,, \quad -2.\lambda_1 = \alpha\,.$$

Vyřešíme-li nejdříve např. soustavu obsahující první, třetí a čtvrtou z těchto rovnic, snadno dostaneme $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -1/2$ a $\alpha = -3$, druhá rovnice je potom splněna automaticky.

Příklad 5.14: Rovina ρ_1 je dána obecnou rovnicí $4.x + y + z - 2 = 0$, rovina ρ_2 obecnou rovnicí $x + 3.z - 4 = 0$. Najděte rovinu ρ, která prochází průsečnicí rovin ρ_1 a ρ_2 a vytíná na souřadnicových osách x, y stejné úseky.

Řešení: Úseková rovnice roviny ρ je

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} = 1\,,$$

kde $\alpha, \alpha, \gamma \in R$ jsou postupně úseky vyťaté rovinou ρ na souřadnicových osách x, y, z Rovina ρ patří svazku určenému rovinami ρ_1 a ρ_2, a tedy

$$\lambda_1 \cdot (4.x + y + z - 2) + \lambda_2 \cdot (x + 3z - 4) = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} - 1$$

pro nějaká $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Odtud dostáváme

$$(4.\lambda_1 + \lambda_2).x + \lambda_1.y + (\lambda_1 + 3.\lambda_2).z - 2.\lambda_1 - 4.\lambda_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot x + \frac{1}{\alpha} \cdot y + \frac{1}{\gamma} \cdot z - 1\,.$$

Řešíme tedy soustavu

$$4.\lambda_1 + \lambda_2 = 1/\alpha\,, \quad \lambda_1 = 1/\alpha\,, \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1/\gamma\,, \quad -2.\lambda_1 - 4.\lambda_2 = -1\,.$$

Postupným dosazením za parametry $\lambda_1 = 1/\alpha$ (z druhé rovnice) a $\lambda_2 = -3/\alpha$ (z první rovnice) lehce vyjde $\alpha = 10$, $\gamma = -5/4$ a výsledná rovnice roviny ρ je tedy tvaru

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{10} - \frac{4.z}{5} = 1$$

neboli $x + y - 8.z - 10 = 0$.

Příklad 5.15: Rovina ρ_1 je dána obecnou rovnicí $2.x + y - 3.z + 2 = 0$, rovina ρ_2 obecnou rovnicí $5.x + 5.y - 4.z + 3 = 0$, rovinami ρ_1 a ρ_2 je tedy určen svazek rovin S. Najděte 2 vzájemně kolmé roviny $\sigma_1, \sigma_2 \in S$ tak, aby jedna z nich procházela bodem $M = [4, -3, 1]$.

Řešení: Každá rovina, která patří svazku S, má obecnou rovnici

$$\alpha.(2.x + y - 3.z + 2) + \beta.(5.x + 5.y - 4.z + 3) = 0$$

pro nějaká $\alpha, \beta \in R$, tedy po roznásobení

$$(2.\alpha + 5.\beta).x + (\alpha + 5.\beta).y + (-3.\alpha - 4.\beta).z + (2.\alpha + 3.\beta) = 0\,.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $M \in \sigma_1$. Tato podmínka dává

$$(2.\alpha + 5\beta).4 + (\alpha + 5.\beta).(-3) + (-3.\alpha - 4.\beta).1 + (2.\alpha + 3.\beta) = 0\,,$$

odtud $4.\alpha + 4.\beta = 0$, a tedy $\alpha + \beta = 0$, takže řešením je např. $\alpha = 1$ a $\beta = -1$. Rovina σ_1 má tedy obecnou rovnici $3.x + 4.y - z + 1 = 0$. Dále hledáme rovinu

σ_2 kolmou na σ_1, což znamená, že normálové vektory obou rovin jsou navzájem kolmé: jsou-li $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$ postupně normálové vektory rovin σ_1 a σ_2, musí platit $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Obecná rovnice roviny σ_2 je tedy tvaru

$$(2.\gamma + 5.\delta).x + (\gamma + 5.\delta).y + (-3.\gamma - 4.\delta).z + (2.\gamma. + 3.\delta) = 0$$

(neboť také rovina σ_2 má patřit svazku S) pro jistá, prozatím neznámá $\gamma, \delta \in R$. Přitom

$$0 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2.\gamma + 5.\delta).3 + (\gamma + 5.\delta).4 + (-3.\gamma - 4.\delta).(-1) .$$

Poslední rovnice dává po roznásobení $13.\delta + 39.\gamma = 0$, tj. $\gamma + 3\delta = 0$, takže např. volbou $\gamma = 3$ a $\delta = -1$ dostaneme obecnou rovnici roviny σ_2 ve výsledném tvaru $x - 2.y - 5.z + 3 = 0$.

Příklad 5.16: Rovina ρ_1 je dána obecnou rovnicí $x + 2.y - 3.z - 6 = 0$, rovina ρ_2 obecnou rovnicí $2.y + 5.z - 4 = 0$, rovinami ρ_1 a ρ_2 je tedy určen svazek rovin S. Přímka p je dána jako průsečnice 2 rovin rovnicemi

$$x + 2.y = 0 \quad 3.x + z + 1 = 0 .$$

Najděte rovinu $\rho \in S$, která je rovnoběžná s přímkou p.

Řešení: Směrový vektor přímky p je $\vec{s} = (1, 2, 0) \times (3, 0, 1) = (2, -1, -6)$. Každá rovina svazku S, tedy i rovina ρ, má obecnou rovnici

$$\alpha.(x + 2.y - 3.z - 6) + \beta.(2.y + 5.z - 4) = 0$$

pro jistá $\alpha, \beta \in R$. Má-li být rovina σ rovnoběžná s přímkou p, musí být její normálový vektor $\vec{n}$ kolmý k vektoru $\vec{s}$ neboli

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{s} = (\alpha, 2.\alpha + 2.\beta, -3.\alpha + 5.\beta) \cdot (2, -1, -6) = 18\alpha - 32\beta$$

což platí např. pro volbu $\alpha = 16$ a $\beta = 9$. Po dosazení parametrů α a β dostáváme obecnou rovnici roviny σ ve výsledném tvaru $16.x + 50.y - 3.z - 132 = 0$.

h) Průmět bodu na přímku a do roviny, průmět přímky do roviny

Čím více typů úloh postupně probíráme, tím více se nám jednotlivé postupy už začínají v nepodstatných obměnách opakovat. Tak např. příklad s průmětem bodu do roviny jsme již počítali, když jsme se zabývali vzdáleností bodu od roviny, ale i při vyšetřování polohy osy dvou mimoběžných přímek (příklad 5.5). Jedna z prvních věcí, kterou musíme znát v deskriptivní geometrii u každé promítací metody ovšem je, jak se promítá bod na přímku a do roviny, případně přímka do roviny. Proto bude užitečné krátké shrnutí, jak lze souřadnice průmětů spočítat. Omezíme se přitom na kolmé promítání.

Průmět $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ bodu P na přímku q, která je dána bodem $Q = [x, y, z]$ a směrovým vektorem $\vec{s}$, určíme jako průnik přímky q s rovinou ρ, která prochází bodem P a je kolmá k přímce q. Normálovým vektorem roviny ρ je tedy směrový vektor přímky q, pak $P_0 = q \cap \rho$.

Průmět $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ bodu P do roviny ρ určíme jako průnik zadané roviny ρ s přímkou q, kde q je přímka procházející bodem P a kolmá k rovině ρ. Směrovým vektorem přímky q je tedy normálový vektor roviny ρ, tedy opět $P_0 = q \cap \rho$.

Průmět p_0 zadané přímky p do zadané roviny ρ můžeme počítat trojím způsobem:

a) Pro libovolně zvolené dva body P, Q ležící na přímce p najdeme postupně jejich průměty P_0, Q_0 do roviny ρ, tyto body P_0, Q_0 pak určují přímku p_0.

b) Průmět p_0 přímky p je průsečnicí dvou rovin $p_0 = \rho \cap \sigma$, kde rovinu ρ známe a rovina σ prochází přímkou p a kolmá k rovině ρ.

c) Pro výpočet použijeme vlastnosti svazku rovin.

Postup a) nám dá rovnici průmětu p_0 v parametrickém tvaru, postupem b) dostaneme přímku p_0 jako průsečnici dvou obecně různoběžných rovin ρ, σ – pak dokážeme parametrický tvar p_0 snadno najít. K postupu c) se vrátíme podrobněji v příkladu 5.16.

Příklad 5.17: Najděte průmět P_0 bodu $P = [3, -1, 4]$ na přímku q, která je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = 2 + 4.t\,, \quad y = 2.t\,, \quad z = 5 - t\,, \quad t \in R\,.$$

Řešení: Rovina ρ kolmá k přímce q má obecnou rovnici $4.x+2.y-z+d = 0$ pro jisté $d \in R$. Z podmínky $P \in \rho$ dostáváme $12-2-4+d = 0$, a tedy $d = -6$, takže výsledná obecná rovnice roviny ρ je $4.x + 2.y - z - 6 = 0$. Průmětem $P_0 = q \cap \rho$ je bod přímky p, který odpovídá parametru t z podmínky $4.(2 + 4.t) + 2.(2.t) - (5 - t) - 6 = 0$, tedy $t = 1/7$. Souřadnice bodu P_0 jsou pak $x = 2 + 4/7 = 18/7$, $y = 2/7$, $z = 5 - 1/7 = 34/7$, což můžeme zapsat ve tvaru $P_0 = [18/7, 2/7, 34/7]$.

Příklad 5.18: Najděte průmět P_0 bodu $P = [1, 0, -6]$ do roviny ρ, která je zadána obecnou rovnicí $2.x - y + 3.z + 2 = 0$.

Řešení: Protože $(2, -1, 3)$ je normálový vektor roviny ρ, má přímka q kolmá k rovině ρ parametrické rovnice

$$x = 1 + 2t \quad y = -t\,, \quad z = -6 + 3t \quad t \in R\,.$$

Dosadíme-li tyto parametrické rovnice přímky q do obecné rovnice roviny ρ, dostaneme $2.(1+2.t)-(-t)+3.(-6+3.t)+2 = 0$, tedy $t = 1$. Pro průmět $P_0 = q \cap \rho$ pak dostáváme $P_0 = [3, -1, -3]$.

Příklad 5.19: Najděte průmět p_0 přímky p, která je zadána jako průsečnice 2 rovin

$$x - 4.y + 2.z - 5 = 0\,, \quad 3.x + y - z + 2 = 0\,,$$

do roviny ρ, která je zadána obecnou rovnicí $2.x + 3.y + z - 6 = 0$. Úlohu nejprve vyřešte bez použití svazku rovin, pak s použitím svazku rovin.

Řešení: Bez použití svazku rovin můžeme např. najít průmět p_0 jako průsečnici rovin ρ a σ, kde σ je rovina procházející přímkou p a kolmá k rovině ρ. Označme $\vec{n}$ normálový vektor roviny ρ, $\vec{s}$ normálový vektor roviny σ, a $\vec{m}$ směrový vektor přímky p. Zřejmě je $\vec{n} = (2, 3, 1)$, $\vec{m} = (1, -4, 2) \times (3, 1, -1) = (2, 7, 13)$ a $\vec{s} = \vec{m} \times \vec{n} = (2, 7, 13) \times (2, 3, 1) = (-32, 24, -8)$. Můžeme tedy jako normálový vektor roviny σ použít vektor $(4, -3, 1)$. Tento vektor je skutečně kolmý k přímce p (k jejímu směrovému vektoru $\vec{m}$) a také k rovině ρ (neboť je kolmý k jejímu normálovému vektoru $\vec{n}$). Celkem má rovina σ obecnou rovnici $4.x - 3.y + z + d = 0$, kde d určíme dosazením libovolného bodu $P \in p$, např. $P = [-3/13, -17/13, 0]$ (pro volbu $z = 0$). Vyjde $d = -3$, takže výsledným průmětem $p_0 = \rho \cap \sigma$ přímky p do roviny ρ je přímka určená jako průsečnice dvou rovin

$$4.x - 3.y + z - 3 = 0\,, \quad 2.x + 3.y + z - 6 = 0\,.$$

Chceme-li znát parametrické rovnice přímky p_0 stačí vypočítat její směrový vektor $(4, -3, 1) \times (2, 3, 1) = (-6, -2, 18)$ nebo také $(3, 1, -9)$ a najít libovolný bod $Q \in p_0$, např. $Q = [-3/2, 0, 9]$. Parametrické rovnice přímky p_0 potom jsou

$$x = -3/2 + 3.t\,, \quad y = t\,, \quad z = 9 - 9.t\,, \quad t \in R\,.$$

K určení roviny σ můžeme také využít svazek rovin: podmínka $p \subset \sigma$ totiž znamená, že rovina σ má obecnou rovnici

$$\alpha.(x - 4.y + 2.z - 5) + \beta.(3.x + y - z + 2) = 0\,,$$

kde $\alpha, \beta \in R$ musíme vybrat tak, aby rovina σ byla kolmá na rovinu ρ. Přepišme tuto rovnici do tvaru

$$(\alpha + 3.\beta).x + (-4.\alpha + \beta).y + (2.\alpha - \beta).z + (-5.\alpha + 2.\beta) = 0$$

a vidíme, že normálový vektor roviny σ je $\vec{m} = (\alpha + 3.\beta, -4.\alpha + \beta, 2.\alpha - \beta)$, přitom z kolmosti rovin σ a ρ plyne

$$0 = \vec{n} \bullet \vec{m} = (2, 3, 1) \bullet (\alpha + 3.\beta, -4.\alpha + \beta, 2.\alpha - \beta) = -8.\alpha + 8.\beta\,.$$

Tato podmínka dává jedinou rovnici $\alpha - \beta = 0$ pro dva parametry $\alpha, \beta \in R$, můžeme tedy zvolit např. $\alpha = \beta = 1$. Odtud dostaneme obecnou rovnici roviny σ ve tvaru

$$(1 + 3).x + (-4 + 1).y + (2 - 1).z + (-5 + 2) = 0$$

a to je stejný výsledek jako v předchozím postupu. Přímka p_0 je určena jako průsečnice dvou rovin (stejných jako výše), další postup je už zcela shodný.

Tento přehled úloh není rozhodně úplný, měl by však stačit k základní orientaci ve výpočtech používaných v analytické geometrii lineárních útvarů v R^3. S použitými technikami, založenými na znalostech lineární algebry a práce s vektory v R^3, vystačíme i u dalších úloh – vzdálenost dvou rovnoběžných rovin určíme tak, že si v jedné z nich zvolíme bod a pak už jen hledáme vzdálenost bodu od roviny, vzdálenost přímky rovnoběžné s rovinou od této roviny můžeme obdobně převést na vyšetřování vzdálenosti bodu od roviny apod. Speciálně jsme se nezabývali ani např. promítáním různých složitějších geometrických útvarů do roviny, častém v deskriptivní geometrii. I zde však můžeme využít toho, že umíme promítat do roviny alespoň jednotlivé body. V dalším studiu se ovšem neobejdeme bez základů analytické geometrie vybraných křivek a ploch, významných pro technickou praxi – např. přechodnic mezi přímými úseky a oblouky při navrhování dopravních staveb, šroubovice a šroubových ploch používaných při konstrukci schodišť v pozemním stavitelství nebo plochy rotačního elipsoidu, s níž se v geodézii pracuje při zobrazování zemského povrchu. Studium nelineárních útvarů v R^3 však již přesahuje rámec tohoto učebního materiálu.

Příklady pro samostatné studium:

Příklad 5.20:

Vyšetřete vzájemnou polohu a stanovte případně vzdálenost dvou přímek

$$x-1=y+2=-2.(z+3)\,,\quad 2.(x-2)=-(y+1)=-(z-1)\,.$$

Výsledek: Přímky jsou mimoběžné; jejich vzdálenost je rovna 3.

Příklad 5.21: Určete bod souměrně sdružený s bodem $P=[4,3,10]$ podle přímky

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}\,.$$

Výsledek: Hledaným bodem je $Q=[2,9,6]$.

Příklad 5.22: Bodem $A=[1,7,9]$ veďte kolmici k přímce $2.x+y-z+3=0$, $x-y+4.z=0$ tak, aby svírala s rovinou, jejíž obecná rovnice je $x-y=0$, úhel $\pi/6$.

Výsledek: Takové přímky jsou dvě – první z nich má parametrické rovnice

$$x=1+t\,,\quad y=7\,,\quad z=9+t\,,\quad t\in R\,,$$

druhá parametrické rovnice

$$x=1+4.s\,,\quad y=7+s\,,\quad z=9+s\,,\quad s\in R\,.$$

Příklad 5.23: Určete úhel dvou rovin $\alpha: 3.x - 1.y + 2z + 15 = 0$, $\beta: 5.x + 9.y - 3.z - 1 = 0$.

Výsledek: Roviny α, β jsou kolmé.

Příklad 5.24: Na přímce $q: x = 1 + t, y = -1 - 2.t, z = -3.t$ najděte bod Q tak, aby vzdálenost tohoto bodu od roviny ρ byla rovna $\sqrt{6}$, kde rovina $\rho: 2.x + y - z + 2 = 0$.

Výsledek: Existují dvě řešení, $Q_1 = [2, -3, -3], Q_2 = [-2, 5, 9]$.

Příklad 5.25: Určete úhel dané přímky p a roviny ρ, je-li přímka p zadána jako průsečnice rovin $3.x - y - 1 = 0$, $3.x + 2.z - 2 = 0$, přitom $\rho: 2.x + y + z - 4 = 0$.

Výsledek: Úhel mezi přímkou a rovinou je roven přibližně $24°$.

Příklad 5.26: Najděte rovinu σ, která je kolmá k rovině ρ_1 a prochází průsečnicí rovin ρ_1, ρ_2, jestliže rovina ρ_1 obsahuje souřadné osy y, z a rovina ρ_2 má parametrický tvar $x = 2 - s, y = 1 - t, z = 1 - 2.s$.

Výsledek: $\sigma: z + 3 = 0$.

Příklad 5.27: Najděte obecnou rovnici roviny ρ, která prochází bodem $A = [-3, 0, 2]$ a přímkou $p: x + 2.y + z - 8 = 0$, $2.x - 11.y - z + 11 = 0$.

Výsledek: $\rho: 7.x - 31.y - 2.z + 25 = 0$.

Příklad 5.28: Na přímce $p: x + 2.y + z - 1 = 0$, $3.x - y + 4.z - 29 = 0$ najděte bod, který má stejnou vzdálenost od bodů $A = [3, 11, 4]$, $B = [-5, -13, -2]$.

Výsledek: Jediné řešení $P = [2, -3, 5]$.

Příklad 5.29: Vypočítejte vzdálenost bodu A od přímky q a také vzdálenost tohoto bodu od roviny ρ, jestliže $q: x = 3 + 4.t,\ y = 5.t,\ z = -2 + 3.t$, rovina $\rho: 5.x - 16.y + 20.z - 31 = 0$, $A = [4, 2, 2]$.

Výsledek: Vzdálenost bodu od přímky je rovna $\sqrt{374/50}$, vzdálenost od roviny vyjde $3/\sqrt{681}$.

Příklad 5.30: Najděte rovinu σ procházející přímkou $p: x + 5.y + z = 0$, $x - z + 4 = 0$ tak, aby svírala úhel $\pi/4$ s rovinou $\rho: x - 4.y - 8.z + 12 = 0$. Úlohu řešte užitím svazku rovin.

Výsledek: Dostaneme dvě řešení $\sigma_1: x - z + 4 = 0, \sigma_2: x + 20.y + 7.z - 12 = 0$.

Příklad 5.31: Určete vzdálenost mimoběžek

$$p: x = -1 + s, y = 1 + s, z = -5 + 2.s, \quad q: x = 1 + t, y = -2 + 3.t, z = 3 - t.$$

Výsledek: Vzdálenost je rovna $7/\sqrt{62}$.

Příklad 5.32: Je dána přímka $p: x - 2.y - 2.z - 2 = 0$, $x + 2.y - 6.z + 10 = 0$ a bod $P = [3, 7, -2]$. Určete

a) parametrický tvar rovnice přímky p
b) bod P' souměrně sdružený k bodu P vzhledem k přímce p
c) obecný tvar rovnice roviny ρ, která prochází přímkou p a je kolmá k rovině $\sigma: 2.x + y + 3.z - 4 = 0$.

Výsledek: Přímka p má parametrický tvar $x = -4 + 4.t, y = -3 + t, z = t$, bod $P' = [5, -9, 6]$, rovina $\rho: x - 5.y + z - 11 = 0$.

6 Ukázka kontrolního testu

Na závěr zařazujeme ukázku kontrolního testu sestaveného ze čtyř příkladů. (Při skutečné zkoušce by samozřejmě chyběly informace o výsledcích.)

Příklad 6.1: Vypočítejte výšku jehlanu $ABCV$, jsou-li jeho vrcholy $A = [3, 5, 3]$, $B = [-2, 11, -5]$, $C = [1, -1, 4]$, $V = [0, 6, 4]$.

Výsledek: Výška je rovna 3.

Příklad 6.2: Na ose x najděte bod P stejně vzdálený od rovin

$$\rho: 16.x - 12.y + 15.z + 1 = 0, \ \sigma: 2.x + 2.y - z - 1 = 0\,.$$

Výsledek: Úloha má dvě řešení $P_1 = [14, 0, 0]$, $P_2 = [11/49, 0, 0]$.

Příklad 6.3: Vyšetřete vzájemnou polohu dvou přímek p, q, je-li přímka p zadána jako průsečnice dvou rovin $3.x + 2.y - z + 1 = 0$, $4.x + y - 3.z + 3 = 0$ a přímka q parametricky rovnicemi $x = 1 + 2.t$, $y = 2 + 2.t$, $z = -1 - t$, $t \in R$. Jde-li o rovnoběžky, určete jejich vzdálenost, jde-li o různoběžky, určete jejich průsečík a úhel, jsou-li zadané přímky mimoběžné, stanovte úhel a nejkratší vzdálenost mezi nimi.

Výsledek: Přímky p, q jsou mimoběžné, jejich vzdálenost je rovna $36/\sqrt{785}$, svírají úhel $\varphi \doteq 80°$.

Příklad 6.4: Jsou dány body $A = [1, -1, 1]$, $B = [2, 0, 3]$, $C = [3, -1, 4]$, $P = [1, 3, -4]$ a přímka p jako průsečnice dvou rovin $3.x - y + z - 1 = 0, x + y + z - 7 = 0$. Určete

a) obecný tvar rovnice roviny ρ procházející body A, B, C,

b) bod P_0 souměrně sdružený k bodu P vzhledem k rovině ρ,

c) obecný tvar rovnice roviny σ, která prochází přímkou p a bodem P.

Výsledek: Obecná rovnice roviny ρ je tvaru $3.x + y - 2.z = 0$, hledaný bod $P_0 = [-5, 1, 0]$, rovina σ má obecnou rovnici $8.x - 6.y + z + 14 = 0$. (Rovinu σ můžeme najít buď užitím svazku rovin $3.x - y + z - 1 = 0$, $x + y + z - 7 = 0$ nebo přímým výpočtem.)

Použitá a doporučená literatura

[1] Daněček, J., Dlouhý, O., Koutková, H., Prudilová, K., Sekaninová, J., Slatinský, E. *Sbírka příkladů z matematiky I*, CERM Brno 1994.

[2] Tryhuk, V. *Matematika* I 2 *(Reálná funkce jedné reálné proměnné)*, CERM Brno 1995.

[3] Novotný, J. *Matematika* I 4 *(Lineární algebra)*, CERM Brno 1995.

[4] Vala, J.*Lineární prostory a operátory*, eletronický učební text pro podporu kombinovaného studia na FAST VUT, Brno 2004.

[5] Budinský, B., Charvát, J. *Matematika I*, SNTL Praha 1987.

[6] Eliaš, J., Horváth, J., Kajan, J. *Zbirerka úloh z vyššej matematiky I*, Alfa Bratislava 1985.

[7] Škrášek, J., Tichý, Z. *Základy aplikované matematiky I*, SNTL Praha 1983.

[8] Anton, H. *Calculus with Analytic Geometry*, John Wiley & Sons, 5th Edition New York 1995.

[9] Thomas, G. B., Finney R. L. *Calculus*, Addison Wesley, 10th Edition New York 2001.

[10] Salas S. L., Hille E. *Calculus – One and Several Variables*, John Wiley & Sons, 9th Edition New York 2003.

[11] Zindulka, O. *Vektorová pole*, elektronický učební materiál dostupný na adrese http://mat.fsv.cvut.cz/zindulka/teaching/main.pdf, Stavební fakulta ČVUT Praha 1999.

[12] Hefferon, J. *Linear Algebra*, elektronický učební materiál dostupný na adrese http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/, Saint Michael's College Colchester, Vermont (USA) 2003.

Rejstřík